Matemaika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

14. elődás:
Magasabbrendű deriváltak,
Polinomiális közelítés (Taylor-polinomok),
Implicit és paraméteres görbék deriváltja.

Magasabbrendű deriváltak

Definíció: Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ valós függvény **másodrendű/második deriváltja** az $f'(x)$ függvény deriváltja.

Jel: $f''(x)$ vagy $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$, egy x_0 pontban $f''(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0}$

Definíció: Hasonlóan f **n-edrendű/n-edik deriváltja** az $(n-1)$-edrendű deriváltnak a deriváltja.

Jel: $f^{(n)}(x)$ vagy $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$, egy x_0 pontban $f^{(n)}(x_0)$ vagy $\left.\dfrac{d^n f(x)}{nx^2}\right|_{x=x_0}$

Példa: $f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ f^{(4)}(x) = \sin x,\ f^{(5)}(x) = \dots$

Közelítő polinomok

Olyan polinomot definiálunk, mely egy adott f, elég sokszor diffható függvényt valamely $x_0 \in D_f$ hely közelében megfelelően jól közelít.

Lineáris polinomra $p(x) = ax + b$, két együtthatót kell meghatározni.

Legyen a közelítő polinomnak és a függvénynek közös pontja $(x_0, f(x_0))$, azaz

$$p(x_0) = f(x_0).$$

Legyen a polinom és a függvény meredeksége azonos az x_0 helyen, azaz

$$p'(x_0) = f'(x_0).$$

Ezt a két feltételt teljesíti a $p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ érintőegyenes.

Pl: $f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$, akkor $p(x) = \cos(0)(x - 0) + 0 = x$.

Közelítő polinomok

Általában keressük $p(x) = a_n(x - x_0)^n + \ldots + a_1(x - x_0) + a_0$ polinomot, illetve annak $a_n, \ldots, a_1, a_0$ együtthatóit, úgy hogy

$$p(x_0) = f(x_0),\ p'(x_0) = f'(x_0),\ p''(x_0) = f''(x_0), \ldots, p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Ha $p(x_0) = f(x_0)$, akkor

$$p(x_0) = a_n 0^n + \ldots + a_1 0 + a_0 = a_0 = f(x_0).$$

Ha $p'(x_0) = f'(x_0)$, akkor

$$p'(x_0) = a_n \cdot n \cdot 0^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 2 \cdot 0 + a_1 = a_1 = f'(x_0).$$

Ha $p''(x_0) = f''(x_0)$, akkor

$$p''(x_0) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot 0^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 0 + a_2 \cdot 2 = 2a_2 = f''(x_0).$$

$$\vdots$$

Ha $p^n(x_0) = f^n(x_0)$, akkor

$$p^n(x_0) = a_n \cdot n \cdot \ldots 2 \cdot 1 = n! \cdot a_n = f^{(n)}(x_0).$$

Tehát

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0), \ldots,\ a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \ldots,\ a_k = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Taylor-polinom

Definíció: Az f függvény n-ed rendű Taylor-polinomja az $x_0 \in D_f$ helyen, ha ott a függvény legalább n-szer deriválható:

$$T^n_{f,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Példa: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 7x - 1$ polinom.

$$\begin{aligned}
f(0) &= x^3 - 3x^2 - 7x - 1|_{x=0} = -1 && \Rightarrow && T^0_{f,0} = -1 \\
f'(0) &= 3x^2 - 6x - 7|_{x=0} = -7 && \Rightarrow && T^1_{f,0} = -7x - 1 \\
f''(0) &= 6x - 6|_{x=0} = -6 && \overset{:2!}{\Rightarrow} && T^2_{f,0} = -3x^2 - 7x - 1 \\
f'''(0) &= 6|_{x=0} = 6 && \overset{:3!}{\Rightarrow} && T^3_{f,0} = x^3 - 3x^2 - 7x - 1 \\
f^{(4)}(0) &= f^{(k)}(0) = 0,\ k \geq 4 && \overset{:k!}{\Rightarrow} && T^k_{f,0} = T^4_{f,0} = T^3_{f,0}
\end{aligned}$$

$T^3_{f,0} = f(x)$, n-ed fokú polinom $\geq n$-ed rendű Taylor-polinomja önmaga.

Példa

$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = 0$, akkor

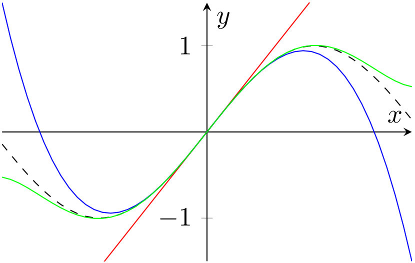
$T^1_{\sin,0}(x) = \cos(0)(x-0) + 0 = x, \quad$ (érintő)

$$T^2_{\sin,0}(x) = \frac{-\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = 0 \cdot x^2 + x + 0 = x,$$

$$T^3_{\sin,0}(x) = \frac{-\cos(0)}{3!}(x-0)^3 - \frac{\sin(0)}{2}(x-0)^2 + \cos(0)(x-0) + 0 = \\ = -\frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 0,$$

$T^4_{\sin,0}(x) = T^3_{\sin,0}(x)$,

$T^5_{\sin,0}(x) = \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{3!}x^3 + x \quad$ stb.



Implicit módon megadott görbék

A koordináta rendszer görbéi megadhatóak olyan (x, y) pontok halmazaként, melyekre teljesül egy megadott $F(x, y) = 0$ egyenlet. Az így definiált göbéket **implicit módon megadott görbéknek** nevezzük. (A függvényként definiált grafikongörbék $y = f(x)$ hozzárendelési szabályát **explicit megadásnak** nevezzük.)

$$\mathcal{G} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, F(x, y) = 0\right\}.$$

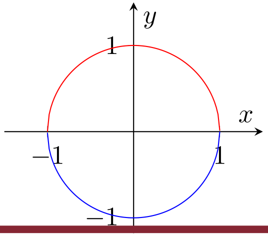
Például az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletet kielégítő x és y koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör:

$$\mathcal{K} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}.$$

Ez a görbe, mint függvény csak két darabban adható meg

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$

$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad D_f = [-1, 1]$$



Implicit görbe érintője

Az implicit módon adott görbe érintőjét egy adott $P(x_0, y_0)$ ponthoz a meredekség $\dfrac{dy}{dx}$ kiszámításával tudjuk megadni. Ekkor a teljes $F(x,y) = 0$ egyenletet deriváljuk.

$$F(x,y) = 0 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\frac{dF(x,y)}{dx} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

itt $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ a két változó közül y-t mint konstanst tekintjük, hasonlóan az y-szerinti deriválásnál x-et. Ekkor

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}$$ adódik az érintő meredekségére, ha $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0$.

Így az érintőegyenes egyenlete P-ben $y = -\dfrac{\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}}(x - x_0) + y_0$.

Implicit görbe érintője

HA $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$, akkor az érintőegyenest a következő alakban adhatjuk meg

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}(y - y_0) = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}(x - x_0).$$

Azaz

$$0 = -\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}(x - x_0),$$

$$x = x_0$$

függőleges érintő adódik.

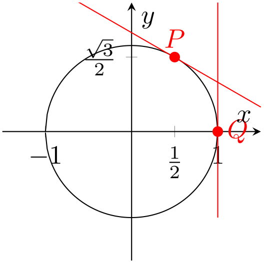
Példa

Az $x^2+y^2=1$ egyenletet kielégítő x és y koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör, írjuk fel az érintőjét a $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontban.

$$x^2+y^2=1 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\bigg|_P=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Az érintő egyenese $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A $Q(1,0)$ pontban az érintő függőleges, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ eltűnik, így az érintő

$$0\cdot(y-0)=-2(x-1)$$
$$x=1.$$

Példa

Az $x^4y+5y^2x-4\sin(x+y)=0$ egyenletet kielégítő pontok halmazára írjuk fel az érintőt a $P\,(0,\pi)$ pontban.

$$x^4y+5y^2x-4\sin(x+y)=0 \qquad / \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\underbrace{4x^3y+5y^2-4\cos(x+y)}_{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}}+\underbrace{x^4+10xy-4\cos(x+y)}_{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x^3y+5y^2-4\cos(x+y)}{x^4+10xy-4\cos(x+y)}\bigg|_P=-\frac{0+5\pi^2-4\cos(\pi)}{0+0-4\cos(\pi)}=-\frac{5\pi^2+4}{4}.$$

Az érintő egyenese $y=-\dfrac{5\pi^2+4}{4}x+\pi$.

Ha $Q\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, azaz $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}=0$. Akkor az érintőegyenes egyenlete

$$0\cdot\left(y-\frac{\pi}{2}\right)=-\left(5\frac{\pi^2}{4}-4\cos(\pi/2)\right)(x-0) \qquad \Longrightarrow \qquad x=0.$$

Paraméteresen adott síkgörbék

A paraméteresen megadott síkgörbék olyan ponthalmazok, melyek koordinátapárjai két függvény, $x(t)$ és $y(t)$ segítségével vannak megadva. Ezek egy $t \in [a, b]$ paraméterintervallum felett vannak definiálva.

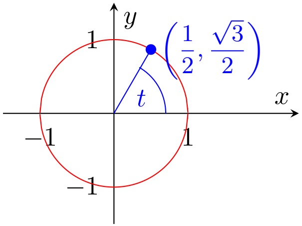
$$\mathcal{G} = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [a, b] \right\}.$$

Például az $x(t) = \cos t$ és $y(t) = \sin t$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú, 1 sugrú kör, ha $t \in [0, 2\pi]$

$$\mathcal{K} = \left\{ (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, t \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Minden t paraméterértékhez pontosan egy görbepont tartozik.

Például: $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$, akkor $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $y_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Paraméteresen adott görbe érintője

Számítsuk ki az $(x(t), y(t))$ görbe t_0 paraméterértékhez tartozó pontjába húzott érintő meredekségét.

$$\left.\frac{dy(t)}{dx(t)}\right|_{t_0} = \frac{dy}{dt} \cdot \left.\frac{dt}{dx}\right|_{t_0} = \dot{y}(t_0)\frac{1}{\dot{x}(t_0)}, \quad \text{ahol } \dot{x}(t_0) \neq 0.$$

A kör $t_0 = \dfrac{\pi}{3}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ pontjában

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Így az érintő egyenlete

$$y = \frac{1/2}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

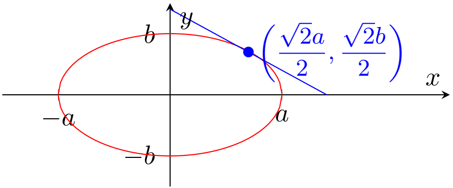
Paraméteresen adott görbe érintője

Az $x(t) = a\cos t$ és $y(t) = b\sin t$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú ellipszis, melynek az x- és y-tegelyekkel egybeesnek a kis- és nagytengelyei, $t \in [0, 2\pi]$. Az ellipszis $t_0 = \frac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\frac{\sqrt{2}a}{2}, \frac{\sqrt{2}b}{2}\right)$ pontjában

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = b\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}b}{2}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -a\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}a}{2}.$$

Így az érintő egyenlete

$$y = -\frac{b}{a}\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}b}{2}.$$



Paraméteresen adott görbe érintője

Az $x(t) = \cos^3 t$ és $y(t) = \sin^3 t$ koordinátájú pontok halmaza egy origó középpontú asztroid, melynek az x- és y-tegelyekkel egybeesnek a szimmetriatengelyei, $t \in [0, 2\pi]$. Az asztroid $t_0 = \dfrac{\pi}{4}$ paraméterértékhez tartozó $P\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ pontjában

$$\dot{y}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \dot{x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Így az érintő egyenlete

$$y = -1\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$