

Matematika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**16. előadás: Primitív függvény,
határozatlan integrál,
alapintegrálok, műveleti tételek,
egyszerű helyettesítés módszere.**

Primitív függvény

Definíció: Az $F(x)$ függvény az $f(x)$ függvény **primitív függvénye** az $I \subseteq D_f$ nyílt intervallumon, ha ott F deriválható és $F'(x) = f(x)$ teljesül minden $x \in I$ -re.

Általában a megfelelő nagybetűvel jelöljük a primitív függvényt.

Példa:

$f(x) = 3x^2$ esetén $F(x) = x^3$ jó

vagy

$F(x) = x^3 + 1$ esetén $F'(x) = (x^3 + 1)' = 3x^2 + 0$,

sőt bármilyen $c \in \mathbb{R}$ -re $F(x) = x^3 + c$ jó

$$F'(x) = (x^3 + c)' = 3x^2 + 0 = f(x).$$

Primitív függvény

Tétel: Ha $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ az I intervallumon, akkor van olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy $F_1(x) = F_2(x) + c$. Azaz a primitív függvény konstans erejéig egyértelmű.

Tekintsük az $f(x)$ függvény primitív függvényeinek halmazát az $I \subseteq D_f$ intervallumon

$$\mathcal{F} = \{F(x) \mid F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I\}.$$

Ezt a függvényhalmazt f **határozatlan integráljának** nevezzük az I intervallumon.

Jelölése:

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Példa:

$$\int 3x^2 \, dx = \{x^3 + c \mid c \in \mathbb{R}\} = x^3 + c.$$

Folytonosság és integrálhatóság

Tétel: Ha az $f(x)$ függvény folytonos, akkor van primitív függvénye.

Indoklás később.

Habár a folytonosság elégséges feltétele a primitív függvény létezésének, ez nem jelenti azt, hogy elemi függvények segítségével felírható a primitív függvény.

Például az $f(x) = e^{-x^2}$ függvénynek van primitív függvénye, hiszen folytonos, de nem tudjuk felírni az általunk ismert függvényekkel.

Műveleti tulajdonságok

Tétel:

$$\int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

$$\int f(x) - g(x) \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$$

$$\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx \quad c \in \mathbb{R}$$

A deriválási szabályok megfordításából következnek.

Elemi függvények integráljai

Mivel $(x)' = 1$, így $\int 1 \, dx = x + c$.

$(x^n)' = nx^{n-1}$, így

$$\int nx^{n-1} \, dx = x^n + c$$

$$\int x^{n-1} \, dx = \frac{1}{n}x^n + c, \quad \text{ha } n \neq 0$$

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, \quad \text{ha } n \neq -1$$

Tudjuk, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, ha $x > 0$, így

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + c, \quad \text{ha } x > 0$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c, \quad \text{ha } x \neq 0$$

Elemi függvények integráljai – táblázat

f	$\int f dx$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c \quad x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
e^x	$e^x + c$
$\operatorname{ch}(x)$	$\operatorname{sh}(x) + c$
$\operatorname{sh}(x)$	$\operatorname{ch}(x) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x) + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcsin}(x) + c \quad x < 1$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

Példák

$$\int x^3 + 4x^2 - 5 \, dx = \frac{x^4}{4} + 4\frac{x^3}{3} - 5x + c$$

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + c = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + c$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos(x) \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f'(x) = \cos(x) \quad \text{és} \quad f(0) = 5.$$

$$f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x) + c$$

$$f(0) = \sin(0) + c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = 5$$

$$f(x) = \sin(x) + 5$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

Feladat

Határozzuk meg azt az $f(x)$ függvényt, melyre

$$f''(x) = x \quad \text{és} \quad f'(2) = 1 \quad \text{és} \quad f(1) = 0.$$

$$f''(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$f'(2) = \frac{2^2}{2} + c_1 = 2 + c_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -1$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - x + c_2 = \frac{x^3}{6} - x + c_2$$

$$f(1) = \frac{1}{6} - 1 + c_2 = -\frac{5}{6} + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{5}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - x + \frac{5}{6}$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) dx =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\int \sin(5x - 7) dx = \frac{1}{5} \int \sin(5x - 7) \cdot 5 dx =$$

Első helyettesítési szabály - a láncszabály megfordítása

Tétel (Egyszerű helyettesítés): Ha az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, akkor

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c$$

Bizonyítás:

$$(F(g(x)) + c)' = F'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Példa:

$$\begin{aligned} \int \sin(5x - 7) dx &= \frac{1}{5} \int \sin(5x - 7) \cdot 5 dx = \\ &= -\frac{\cos(5x - 7)}{5} + c \end{aligned}$$

ahol $f(x) = \sin x$, $F(x) = -\cos x$, $g(x) = 5x - 7$, $g'(x) = 5$

Példák

$$\int \cos(2x) dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) \, dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} \, dx = \ln|x-2| + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100} dx =$$

Példák

$$\int \cos(2x) dx = \frac{\sin(2x)}{2} + c,$$

$$\int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$\int \frac{1}{x-2} dx = \ln|x-2| + c$$

$$\int \frac{1}{(x-2)^2} dx = \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x-2} + c$$

$$\int (2x-3)^{100} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x-3)^{101}}{101} + c = \frac{(2x-3)^{101}}{202} + c$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c.$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

$$\int \cos^3(x) dx =$$

Példák - Általában

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$$

ahol $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(x) = e^x$, $F(x) = e^x$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \cdot \sin(x) dx = -\ln |\cos(x)| + c$$

$$\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx = \operatorname{arctg}(e^x) + c$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) dx &= \int (1 - \sin^2(x)) \cdot \cos(x) dx = \\ &= \int \cos(x) dx - \int \sin^2(x) \cdot \cos(x) dx = -\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c \end{aligned}$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + c.$$