

GTK NG,PSZ 2022. ősz

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

17. előadás: Parciális integrálás, Teljes helyettesítés.

Parciális integrálás

A szorzatra vonatkozó deriválási szabály:

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = (f(x)g(x))'.$$

Integrálva az egyenlet mindkét oldalát

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + c.$$

Átrendezve az egyenletet

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Ezt nevezzük **parciális integrálásnak**.

Példa:

$$\int \underbrace{x}_f \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = \underbrace{x \sin(x)}_{f \cdot g} - \int \underbrace{\sin(x)}_{f' \cdot g} dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

ahol $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ illetve $g'(x) = \cos(x)$, $g(x) = \sin(x)$.

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx =$$

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3}\right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

Többszörös alkalmazás

$$\int \underbrace{x^2}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \underbrace{x^2 \frac{e^{3x}}{3}}_{fg} - \int \underbrace{2x \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^{3x}}_{g'} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \underbrace{\left(x \frac{e^{3x}}{3}\right)}_{fg} + \frac{2}{3} \int \underbrace{1 \cdot \frac{e^{3x}}{3}}_{f'g} dx =$$

ahol $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ és $g'(x) = e^{3x}$, $g(x) = \frac{e^{3x}}{3}$,

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2x e^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27} + c.$$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x) dx =$$

ahol $f(x) = \sin(2x)$, $f'(x) = 2 \cos(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

ahol $f(x) = \cos(2x)$, $f'(x) = -2 \sin(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

Integrálegyenlet rendezése

$$\int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\sin(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - \int 2e^x \cos(2x) dx =$$

ahol $f(x) = \sin(2x)$, $f'(x) = 2 \cos(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

$$= e^x \sin(2x) - 2 \int \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(2x)}_f dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

ahol $f(x) = \cos(2x)$, $f'(x) = -2 \sin(2x)$ és $g'(x) = e^x$, $g(x) = e^x$

Így a teljes egyenlőséget rendezve

$$\int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) - 4 \int e^x \sin(2x) dx$$

$$5 \int e^x \sin(2x) dx = e^x \sin(2x) - 2e^x \cos(2x) + c$$

$$\int e^x \sin(2x) dx = \frac{1}{5} e^x \sin(2x) - \frac{2}{5} e^x \cos(2x) + c$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

ahol $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

ahol $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \, dx =$$

Parciális integrálás és az inverz függvények

$$\int \ln(x) \, dx = \int 1 \cdot \ln(x) \, dx = x \ln(x) - \int \frac{1}{x} x \, dx =$$

ahol $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \ln(x) - \int 1 \, dx = x \ln(x) - x + c.$$

$$\int \operatorname{arctg}(x) \, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x}{x^2 + 1} \, dx =$$

ahol $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, $f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ és $g'(x) = 1$, $g(x) = x$

$$= x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx = x \operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c.$$

Teljes helyettesítés - Bevezető példa

A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja:

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx$$

Ekkor új változót vezetünk be $t = \sqrt{x}$, és a régi változót kifejezzük az újjal $t^2 = x$. Lederiválva az egyenletet

$$\frac{dx}{dt} = 2t,$$

így kifejezhető $dx = 2t \, dt$, tehát

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx \stackrel{dx=2t \, dt}{=} \int \sin(t) 2t \, dt = 2 \int t \sin(t) \, dt$$

Ezt az integrált már parciális integrálással ki tudjuk számítani

$$2 \int t \sin(t) \, dt = 2t(-\cos(t)) - 2 \int -\cos(t) \, dt = -2t \cos(t) + 2 \sin t + c,$$

$$\text{ahol } f(t) = t, f'(t) = 1 \text{ és } g'(t) = \sin(t), g(t) = -\cos(t)$$

A végeredménybe még az eredeti változót vissza kell írni:

$$\int \sin(\sqrt{x}) \, dx = -2t \cos(t) + 2 \sin(t) + c = -2\sqrt{x} \cos(\sqrt{x}) + 2 \sin(\sqrt{x}) + c.$$

Teljes helyettesítés - Általában

- A feladatban az összetett függvény mellett nem jelenik meg a belső függvény deriváltja, ezért alkalmas új változót jelölünk ki, és a régi változót kifejezzük az újjal $g(t) = x$.
- Lederiválva az egyenletet

$$g'(t) = \frac{dx}{dt},$$

így kifejezhető $dx = g'(t) dt$.

- Változócsereét hajtunk végre az integrálon

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

- A végeredménybe visszaírjuk az eredeti változót.

$$\int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx =$$

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = \int \frac{t^2}{1+t} \frac{1}{t} dt = \int \frac{t}{1+t} dt =$$

$t = e^x \rightsquigarrow x = \ln(t)$, így $g(t) = \ln(t)$, melynek deriváltja: $g'(t) = \frac{1}{t}$

$$= \int \frac{1+t-1}{1+t} dt = \int 1 - \frac{1}{1+t} dt = t - \ln|1+t| + C =$$

Végül visszaírjuk az eredeti változót:

$$= e^x - \ln(1+e^x) + C$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 + \sin^2(t)} = \cos(t)$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 + \sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

Példa - helyettesítés trigonometrikus és hyperbolikus függvényekkel

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\cos(t)} \cos(t) dt = \int 1 dt = t + c = \arcsin(x) + c$$

$$x = \sin(t) \rightsquigarrow t = \arcsin(x), \quad \frac{dx}{dt} = \cos(t) \rightsquigarrow dx = \cos(t) dt,$$

$$\sqrt{1 + \sin^2(t)} = \cos(t)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \operatorname{ch}(t) dt = \int 1 dt = t + C = \operatorname{arsh}(x) + c$$

$$x = \operatorname{sh}(t), \quad \frac{dx}{dt} = \operatorname{ch}(t) \rightsquigarrow dx = \operatorname{ch}(t) dt$$

$$\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(t)} = \operatorname{ch}(t)$$