

1. Gyakorlat - Megoldások

Középiskolai ismeretek ismétlése.

F1. (Egyenletek megoldása). Oldjuk meg \mathbb{R} -en a következő egyenleteket és szemléltessük megoldáshalmazukat a számegyenesen:

$$(a) \quad x + 2 = \sqrt{4x + 13},$$

$$(b) \quad \left| \frac{3x + 2}{x - 1} \right| = 3.$$

Megoldás [F1(a)]. A gyökvonás miatt $4x + 13 \geq 0$, azaz $x \geq -13/4$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk:

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 &= 4x + 13 \\ x^2 + 4x + 4 &= 4x + 13 & / - 4x - 4 \\ x^2 &= 9 \\ x &= \pm 3\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe

$$\begin{aligned}5 &= 3 + 2 = \sqrt{4 \cdot 3 + 13} = \sqrt{25} = 5 \\ -1 &= -3 + 2 \neq \sqrt{4 \cdot (-3) + 13} = \sqrt{-12 + 13} = \sqrt{1} = 1\end{aligned}$$

azt kapjuk, hogy az $x = 3$ a helyes megoldás, az $x = -3$ nem megoldás.

Megoldás [F1(b)]. Kikötjük, hogy $x - 1 \neq 0$, azaz $x \neq 1$. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor 3, ha a szám -3 vagy $+3$. Tehát két eset van:

$$\begin{aligned}\frac{3x + 2}{x - 1} &= 3 \\ 3x + 2 &= 3x - 3 & / - 3x \\ 2 &\neq -3\end{aligned}$$

azaz itt nincs megoldás, vagy

$$\begin{aligned}\frac{3x + 2}{x - 1} &= -3 \\ 3x + 2 &= -3x + 3 & / + 3x - 2 \\ 6x &= 1\end{aligned}$$

azaz $x = \frac{1}{6} (\neq 1)$ az egyetlen megoldás.

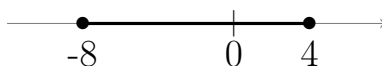
F2. (Abszolútértékes egyenlőtlenség megoldása). Oldjuk meg \mathbb{R} -en a következő egyenlőtlenséget, és szemléltessük a megoldáshalmazt a számegyenesen:

$$\left| \frac{x+2}{2} \right| \leq 3.$$

Megoldás [F2]. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 3, ha a szám -3 és 3 között van:

$$\begin{aligned} -3 &\leq \frac{x+2}{2} \leq 3 && / \cdot 2 \\ -6 &\leq x+2 \leq 6 && / -2 \\ -8 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

tehát a megoldás: $x \in [-8, 4]$.

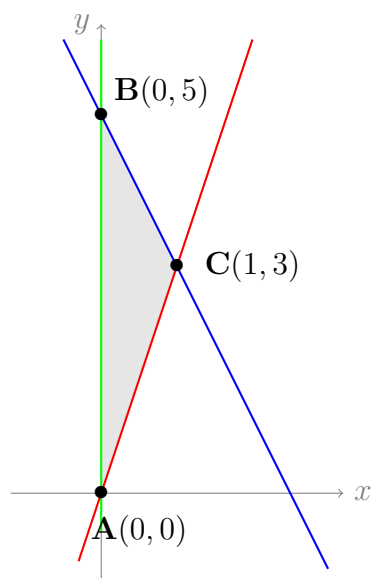


F3. (Egyenlőtlenségrendszer felírása). Írjunk fel olyan egyenlőtlenségrendszert, melynek megoldáshalmaza az $A(0, 0)$, $B(0, 5)$ és $C(1, 3)$ csúcspontú háromszög belseje!

Megoldás [F3]. AB oldalegyenese az y -tengely, melynek egyenlete $x = 0$, ettől jobbra lévő pontok halmaza: $x > 0$.

AC oldalegyenes meredéksége $(3 - 0)/(1 - 0) = 3$ így az egyenlete $y = 3x + 0$ (átmegy az origón). A háromszög belseje ezen egyenes felett van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y > 3x$.

A BC oldalegyenes meredéke -2 , így az egyenlete $y = -2x + 5$, mert az y -tengelyt az 5 -nél metszi. A háromszög belseje ezen egyenes alatt van, így a megfelelő egyenlőtlenség: $y < -2x + 5$.



F4. (Körök és parabolák ábrázolása). Vázlatosan ábrázoljuk azon pontok mértani helyét a síkon, melyekre az alábbi egyenlőtlenségek egyszerre teljesülnek

$$x^2 + y^2 + 2y < 3 \quad \text{és} \quad y^2 < x + 2.$$

Megoldás [F4]. Az első egyenlőtlenséget teljes négyzetté alakítjuk:

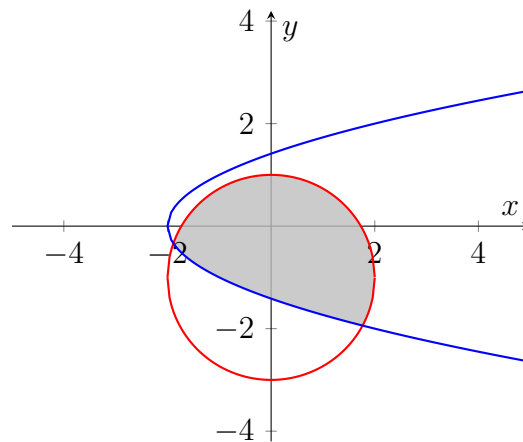
$$\begin{aligned} x^2 + (y + 1)^2 - 1 &< 3 \\ x^2 + (y + 1)^2 &< 4, \end{aligned}$$

ami egy $(0, -1)$ középpontú, 2 sugarú kör belseje.

A második egyenlőtlenségnél először csak a határgörbét tekintsük:

$$y^2 = x + 2.$$

Ez egy parabola, melynek szimmetriatengelye az $y = -0/(2 \cdot 1) = 0$ azaz az x -tengely. Csúcspontja az $y = 0$ behelyettesítésével adódik $(-2, 0)$. A görbe y -tengellyel vett metszéspontjai az $x = 0$ és $y = \pm\sqrt{2}$ koordinátájú pontok. Ennek a belső pontjai az egyenlőtlenséget kielégítő pontok.



F5. (Halmazműveletek). Lássuk be, hogy a következő halmazok esetén teljesül, hogy $A \subseteq C$, $A \neq C$, $B \cup C = C$, $A \cap B = \{2, 10\}$, ahol

$$A = \{1, 2, 10\}, \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 1\}, \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \geq 1\}.$$

Megoldás [F5]. $A \subseteq C$ mert $\forall a \in A$ -ra $a \in C$

$$1^2 = 1 \geq 1 \Rightarrow 1 \in C$$

$$2^2 = 4 \geq 1 \Rightarrow 2 \in C$$

$$10^2 = 100 \geq 1 \Rightarrow 10 \in C$$

De például $3^2 \geq 1$ szintén és $3 \notin A$, így $A \neq C$.

$B \cup C = C$ mivel $B \subset C$ belátható, hiszen

$$B = \{2, 3, 4, \dots\}$$

$$C = \{\dots, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$A \cap B = \{1, 2, 10\} \cap \{2, 3, 4, \dots\} = \{2, 10\}$, pontosan két elem van A -ban, ami B -ben is szerepel.

Opcionális(ha marad idő)

F6. (Teljes indukció). Bizonyítsuk be teljes indukcióval minden $n > 0$ egész számra, hogy

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Megoldás [F6]. Ha $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot (1+1)} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Tegyük fel $n = N$ -re igaz, azaz

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N}{N+1} \quad (\text{indukciós feltétel})$$

Vizsgáljuk $n = N + 1$ -re

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} \quad (\text{ind.felt.}). \\ &= \frac{N}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} = \frac{N(N+2) + 1}{(N+1)(N+2)} = \frac{N^2 + 2N + 1}{(N+1)(N+2)} = \frac{(N+1)^2}{(N+1)(N+2)} = \frac{N+1}{N+2}. \end{aligned}$$

F7. (Indirekt bizonyítás). Igazoljuk, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám.

Megoldás [F7]. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt{5}$ racionális, ekkor $\exists p, q \in \mathbb{Z}$, úgy hogy $\sqrt{5} = p/q$. Legyen p és q olyan pozitív egész, hogy a tört tovább már nem egyszerűsíthető (azaz nincs közös osztójuk). Ekkor

$$\begin{aligned}
\sqrt{5} &= p/q & / \cdot q \\
\sqrt{5} \cdot q &= p & / \text{az egyenletet négyzetre emeljük, hisz } p, q > 0 \\
5q^2 &= p^2 & / : 25 \quad \text{ekkor } p\text{-nek osztója kell legyen az } 5, \text{ tehát } r = p/5 \text{ egész} \\
\frac{q^2}{5} &= r^2
\end{aligned}$$

és mivel a jobb oldalon egész szám áll, ezért $\frac{q^2}{5}$ is egész szám kell, hogy legyen, tehát q -nak is osztója az 5. Így találtunk egy közös osztót p -re és q -ra, ami ellentmond annak, hogy p/q tovább nem egyszerűsíthető. Ezért az eredeti feltevésünk hamis kell, hogy legyen.