A1 MINTA(A) 1. zárthelyi - MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenletet, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$x+3=\sqrt{x+5}.$$

Megoldás. A gyökvonás miatt $x+5\geq 0$, azaz $x\geq -5$. Az egyenletet négyzetre emelve esetleg hamis gyököket kaphatunk (fel kellene tennünk, hogy $x+3>0$, azaz $x>-3$):

$$\begin{aligned}
(x+3)^2 &= x+5 \\
x^2+6x+9 &= x+5 \qquad /-x-5 \\
x^2+5x+4 &= 0 \\
x_{1,2} &= \frac{-5\pm\sqrt{25-4\cdot 4}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2}=-1,-4.
\end{aligned}$$

Visszahelyettesítve ezeket az eredeti egyenletbe azt kapjuk, hogy az $x=-1$ a helyes megoldás, az $x=-4$ nem megoldás.

2. Határozzuk meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írjuk fel gyöktényezős alakban!

$$x^4-x^3-18x^2-13x+15.$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 15 osztói lehetnek.
$(-3)^4-(-3)^3-18(-3)^2-13(-3)+15=0,$ tehát az $x_1=-3$ gyök.
továbbá $(5)^4-(5)^3-18(5)^2-13(5)+15=0,$ tehát az $x_2=5$ is gyök.
Mivel $(x+3)(x-5)=x^2-2x-15$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrrr}
x^4 & - & x^3 & - & 18x^2 & - & 13x & + & 15 \quad : x^2-2x-15 = x^2+x-1 \\
x^4 & - & 2x^3 & - & 15x^2 & & & & \\
\hline
 & & x^3 & - & 3x^2 & - & 13x & + & 15 \\
 & & x^3 & - & 2x^2 & - & 15x & & \\
\hline
 & & & - & x^2 & + & 2x & + & 15 \\
 & & & - & x^2 & + & 2x & + & 15 \\
\hline
 & & & & & & & & 0
\end{array}$$

Kerssük meg a x^2+x-1 másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-1)\cdot 1}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

A gyöktényezős alak

$$(x+3)(x-5)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsuk elő az inverz függvényt!

$$f(x) = 2^{x+3} - 7.$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x) = f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x = y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 7 &= 2^{y+3} - 7 \\ 2^{x+3} &= 2^{y+3} \\ x + 3 &= y + 3 \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. Ha $f(x) = y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 7 &= y \\ 2^{x+3} &= y + 7 \\ x + 3 &= \log_2(y+7) \qquad \text{ha } y + 7 > 0. \\ x &= \log_2(y+7) - 3, \qquad \text{ha } y > -7. \end{aligned}$$

Azonban $y > -7$ teljesül, hiszen ha

$$\begin{aligned} 2^{x+3} - 7 &> -7 \\ 2^{x+3} &> 0. \end{aligned}$$

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x) = \log_2(x+7) - 3, \quad x \in (-7, \infty)$.

4. Vizsgáljuk a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n = \frac{n+1}{2n^2 - 1}.$$

Megoldás. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n^2-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n}}{2n - \frac{1}{n}} = \dfrac{1+0}{\infty - 0} = 0$, vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned} a_n &\gtrless a_{n+1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\gtrless \frac{n+2}{2(n+1)^2 - 1} \\ \frac{n+1}{2n^2-1} &\gtrless \frac{n+2}{2n^2 + 4n + 1} \\ 2n^3 + 6n^2 + 5n + 1 &\gtrless 2n^3 + 4n^2 - n - 2 \\ 2n^2 + 6n + 3 &> 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.} \end{aligned}$$

Felülről korlátos, felső korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = \dfrac{2}{2-1} = 2$. Alsó korlátja a határérték.