A1 1. zárthelyi (A) MEGOLDÁS 2022. október 11.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left|\frac{2x+5}{3}\right| \leq 1.$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legfeljebb 1, ha a szám -1 és 1 között van:

$$-1 \leq \frac{2x+5}{3} \leq 1$$

(1 pont)

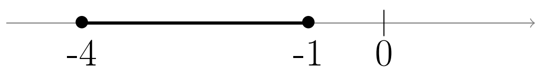
$$-3 \leq 2x+5 \leq 3$$

$$-8 \leq 2x \leq -2$$

$$-4 \leq x \leq -1$$

(2 pont)

tehát a megoldás: $x \in [-4, -1]$. (1 pont)



(1 pont)

2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel irreducibilis tényezők szorzataként!

$$2x^3 - 3x^2 - x - 2.$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek 2 osztói lehetnek $\pm 1, \pm 2$.
$2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 2 - 2 = 0$, tehát az $x_1 = 2$ gyök. (1 pont)
Mivel $x-2$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rcrcrcrl}
2x^3 & - & 3x^2 & - & x & - & 2 & : x-2 = 2x^2+x+1 \\
2x^3 & - & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & & x^2 & - & x & - & 2 & \\
 & & x^2 & - & 2x & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & x & - & 2 & \\
 & & & & x & - & 2 & \\
\cline{5-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

(2 pont)

Keressük meg a $2x^2 + x + 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel (1 pont)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}.$$

Nincs további valós gyök. A gyöktényezős alak: (1 pont)

$$(x-2)(2x^2+x+1).$$

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt, és határozza meg az értelmezési tartományát!

$$f(x)=\frac{5x}{x-1}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x)=f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x=y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned}\frac{5x}{x-1}&=\frac{5y}{y-1}\\ 5xy-5x&=5xy-5y\\ -5x&=-5y\\ x&=y.\end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)
Ha $f(x)=y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned}\frac{5x}{x-1}&=y\\ 5x&=yx-y\\ x(5-y)&=-y\\ x&=\frac{-y}{5-y}, \qquad \text{ha } y\neq 5.\end{aligned}$$

(2 pont)

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-5}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}.$ (1 pont)

4. Vizsgálja a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n=\frac{1}{4^n-1}.$$

Megoldás. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n-1}=\dfrac{1}{\infty-1}=0.$ (1 pont)
Vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned}a_n&\gtrless a_{n+1}\\ \frac{1}{4^n-1}&\gtrless\frac{1}{4^{n+1}-1}\\ 4^{n+1}-1&\gtrless 4^n-1\\ 4\cdot4^n&\gtrless 4^n\\ 3\cdot4^n&>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.}\end{aligned}$$

(2 pont)

Korlátos, felső korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1=\dfrac{1}{4-1}=\dfrac{1}{3}$. Alsó korlátja a határérték 0. (2 pont)