A1 1. zárthelyi (B) MEGOLDÁS 2022. október 11.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget, és megoldásait szemléltesse a számegyenesen!

$$\left|\frac{2x+5}{3}\right| \geq 1.$$

Megoldás. Egy szám abszolút értéke pontosan akkor legalább 1, ha a szám −1-nél kisebb vagy egyenlő vagy 1-nél nagyobb vagy egyenlő:

$$-1 \geq \frac{2x+5}{3} \quad \text{vagy} \quad \frac{2x+5}{3} \geq 1$$

(1 pont)

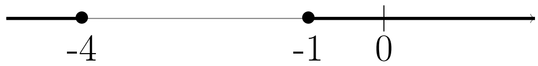
$$-3 \geq 2x+5 \quad \text{vagy} \quad 2x+5 \geq 3$$

$$-8 \geq 2x \quad \text{vagy} \quad 2x \geq -2$$

$$-4 \geq x \quad \text{vagy} \quad x \geq -1$$

(2 pont)

tehát a megoldás: $x \in (-\infty, -4] \cup [-1, \infty)$. (1 pont)



(1 pont)

2. Határozza meg az alábbi polinom valamennyi valós gyökét, és írja fel irreducibilis tényezők szorzataként!

$$2x^3 - 8x^2 + 9x - 2.$$

Megoldás. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek −2 osztói lehetnek $\pm 1, \pm 2$.
$2 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 18 - 2 = 0$, tehát az $x_1 = 2$ gyök. (1 pont)
Mivel $x - 2$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
2x^3 & - & 8x^2 & + & 9x & - & 2 & : x-2 = 2x^2 - 4x + 1 \\
2x^3 & - & 4x^2 & & & & & \\
\hline
 & - & 4x^2 & + & 9x & - & 2 & \\
 & - & 4x^2 & + & 8x & & & \\
\hline
 & & & & x & - & 2 & \\
 & & & & x & - & 2 & \\
\hline
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

(2 pont)

Keressük meg a $2x^2 - 4x + 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel (1 pont)

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A gyöktényezős alak: (1 pont)

$$2 \cdot (x-2)\left(x-\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\left(x-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right).$$

3. Invertálható-e az alábbi függvény? Ha igen, állítsa elő az inverz függvényt, és határozza meg az értelmezési tartományát!

$$f(x)=\frac{x-1}{5x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Megoldás. Az invertálhatósághoz az kell, hogy az $f(x)=f(y)$ egyenlőségből következzen, hogy $x=y$. Ebben az esetben:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{5x} &= \frac{y-1}{5y} \\ 5xy-5y &= 5xy-5x \\ -5x &= -5y \\ x &= y. \end{aligned}$$

Tehát a függvény invertálható. (2 pont)
Ha $f(x)=y$ akkor keressük meg, hogy adott y esetén hogyan fejezhető ki x.

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{5x} &= y \\ x-1 &= 5xy \\ x(1-5y) &= 1 \\ x &= \frac{1}{1-5y}, \qquad \text{ha } y \neq \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(2 pont)

Így az inverzfüggvény $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{1-5x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{5}\right\}$. (1 pont)

4. Vizsgálja a sorozat korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

$$a_n=\frac{1}{1-4^n}.$$

Megoldás. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-4^n}=\dfrac{1}{1-\infty}=0.$ (1 pont)
Vizsgálva a monotonitást

$$\begin{aligned} a_n &\gtrless a_{n+1} \\ \frac{1}{1-4^n} &\gtrless \frac{1}{1-4^{n+1}} \\ 1-4^{n+1} &\gtrless 1-4^n \\ 4^n &\gtrless 4\cdot 4^n \\ 0 &< 3\cdot 4^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növő.} \end{aligned}$$

(2 pont)

Korlátos, alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1=\dfrac{1}{1-4}=\dfrac{-1}{3}$. Felső korlátja a határérték 0. (2 pont)