GTK NG,PSZ 2022. ősz

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

21. előadás: Alapintegrálokra vezető feladatok.

Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa:

$$\int_1^e x\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - 0 - \int_1^e \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$f(x) = \ln x \quad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x \qquad g(x) = \frac{x^2}{2}$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Feladat

$$\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[x\frac{\sin(2x)}{2}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} - \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & f'(x) = 1 \\ g'(x) = \cos(2x) & g(x) = \frac{\sin(2x)}{2} \end{array}$$

$$= 0 - \frac{\pi}{8} - \left[-\frac{\cos(2x)}{4}\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\frac{\pi}{8} - \left(-\frac{-1}{4} - 0\right) = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Határozott integrál kiszámítása helyettesítéses integrálással

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_a}^{t_b} f(x(t))x'(t)\ \mathrm{d}t,$$

ahol $x = x(t)$ monoton függvény és $x(t_a) = a$, $x(t_b) = b$.

Példa:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$$

Ha $t = e^x \ \Rightarrow\ x(t) = \ln t$, melynek deriváltja: $x'(t) = \dfrac{1}{t}$.

Határok: ha $x = 0$, akkor $t_0 = e^0 = 1$, ha $x = 1$, akkor $t_1 = e^1 = e$.

$$= \int_1^e \frac{t}{t^2+1}\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{arctg}(t)\Big]_1^e = \mathrm{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}.$$

Feladat

$$\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x =$$

Ha $t = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; x = t^2$, ha $t > 0$, és $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$.

Határok: $x = \pi^2 \rightsquigarrow t = \pi \qquad x = 0 \rightsquigarrow t = 0$

$$= \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot 2t \;\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} t\sin(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$f(t) = t, \quad g'(t) = \sin(t) \quad \longrightarrow \quad f'(t) = 1, \quad g(t) = -\cos(t)$$

$$= 2\left(\Big[-t\cos(t)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) = 2\left(-\pi\cdot(-1) + \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi}\right) = 2\pi.$$

Határozott integrál kiszámítása parciális törtekre bontással

$$\int_2^3 \frac{x^4+1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 (x+1) + \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_2^3 +$$

$$+\int_2^3 \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{(x-1)}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)} = \frac{Ax^2-Ax+Bx-B+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$A+C=1, \quad B-A=0, \quad -B=1 \quad \Rightarrow \quad A=-1,\ B=-1,\ C=2.$$

$$= \left(\frac{15}{2}-4\right) + \int_2^3 \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{2} + \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1|\right]_2^3 =$$

$$\frac{7}{2} - \ln(3) + \ln(2) + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\ln(2) - 2\ln(1) = \frac{10}{3} - \ln(3) + 3\ln(2).$$