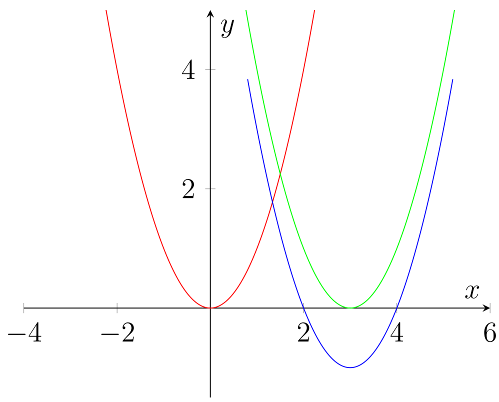
2. Gyakorlat
Függvénytranszformációk, polinomok.

F1. (Függvénytranszformációk). Ábrázoljuk függvénytranszformációkkal a következő függvényeket:

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$,

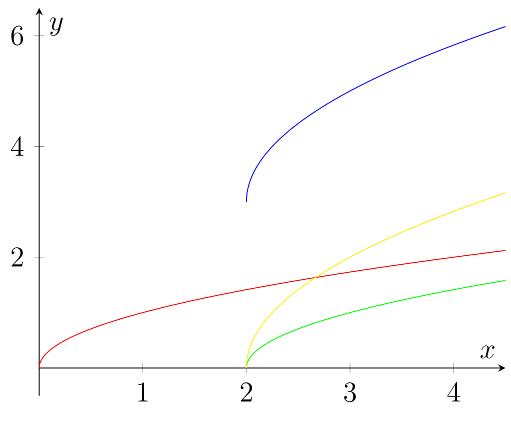
(b) $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 3$.

Megoldás [F1(a)]. Alkítsuk a kifejezést teljes négyzetté: $f(x) = (x-3)^2 - 1$. Az x^2 grafikonját 3 egységgel jobbra tolva kapjuk a $(x-3)^2$ függvény grafikonját. Végül 1-gyel való lefele tolással kapjuk a $(x-3)^2 - 1$ grafikonját.



Ez egy parabola, melynek szimmetriatengelye az $x = 6/(2 \cdot 1) = 3$ azaz az $x = 3$ egyenes. Csúcspontja az $x = 3$ behelyettesítésével adódik $(3, -1)$. A görbe x-tengellyel vett metszéspontjai az $y = 0$ és $x = 2$ és 4 koordinátájú pontok ($x^2 - 6x + 8 = 0$ megoldásai).

Megoldás [F1(b)]. Hasonlóan az előzőhöz: A $\sqrt{x}$ grafikonját 2 egységgel jobbra tolva kapjuk a $\sqrt{x-2}$ függvény grafikonját. Ennek a $2\sqrt{x-2}$ a kétszerese, tehát ezt meg kell egy kicsit nyújtanunk az y-tengely irányába, és végül 3-mal való feltolással kapjuk a $2\sqrt{x-2}+3$ grafikonját.



F2. (Egyszerű gyöktényezős alakra hozás). Keressük meg a polinomok egész gyökeit, írjuk fel a polinomokat elsőfokú tényezők szorzataként!

(a) $x^2 + 7x + 10$,

(b) $x^3 - x^2 - 25x + 25$.

Megoldás [F2(a)]. Kerssük meg a másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-7 \pm 3}{2} = \begin{matrix} -2 \\ -5 \end{matrix}$$

vagy felhasználva, hogy $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$, ezért a kifejezés gyökeire teljesül, hogy

$$x_1 \cdot x_2 = 10,$$

$$x_1 + x_2 = -7.$$

Könnyen látszik, hogy a -2 és -5 egész számokra ez teljesül. Így a polinom gyöktényezős alakja

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5).$$

Megoldás [F2(b)]. Az egész gyökök osztják a konstas tagot (25), azaz $\pm 1, \pm 5$ és ± 25 jöhet szóba. $x_1 = 1$ gyök lesz és az $x_{2,3} = \pm 5$ is. Így a polinom gyöktényezős alakja

$$(x - 1)(x - 5)(x + 5).$$

F3. (Polinomosztás.) Végezzük el a $p(x) : q(x)$ polinomosztást, ha $p(x) = 2x^4 - x^2 - 5x + 6$ és $q(x) = x^2 - 3x$. Ellenőrizzük az osztás helyességét is!

Megoldás [F3].

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
2x^4 & & & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & : x^2-3x = 2x^2+6x+17 \\
2x^4 & - & 6x^3 & & & & & & & \\
\hline
& & 6x^3 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 & \\
& & 6x^3 & - & 18x^2 & & & & & \\
\hline
& & & & 17x^2 & - & 5x & + & 6 & \\
& & & & 17x^2 & - & 51x & & & \\
\hline
& & & & & & 46x & + & 6 &
\end{array}
$$

Tehát

$$2x^4 - x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x)(2x^2 + 6x + 17) + 46x + 6.$$

F4. (Polinom valós gyökeinek keresése). Határozzuk meg az alábbi polinomok valamennyi valós gyökét, és írjuk fel gyöktényezős alakban!

(a) $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3$,

(b) $x^3 - 7x^2 + 2x - 14$.

Megoldás [F4(a)]. Először próbáljunk egész gyököket keresni, ezek -3 osztói lehetnek.
$(1)^4 - 6(1)^3 + 10(1)^2 - 2(1) - 3 = 1 - 6 + 10 - 2 - 3 = 0,$ tehát az $x_1 = 1$ gyök.
továbbá $(3)^4 - 6(3)^3 + 10(3)^2 - 2(3) - 3 = 81 - 162 + 90 - 6 - 3 = 0,$ tehát az $x_2 = 3$ is gyök.
Mivel $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrl}
x^4 & - & 6x^3 & + & 10x^2 & - & 2x & - & 3 & : x^2-4x+3 = x^2-2x-1 \\
x^4 & - & 4x^3 & + & 3x^2 & & & & & \\
\hline
& - & 2x^3 & + & 7x^2 & - & 2x & - & 3 & \\
& - & 2x^3 & + & 8x^2 & - & 6x & & & \\
\hline
& & & - & x^2 & + & 4x & - & 3 & \\
& & & - & x^2 & + & 4x & - & 3 & \\
\hline
& & & & & & & & 0 &
\end{array}
$$

Kerssük meg a $x^2 - 2x - 1$ másodfokú polinom gyökeit megoldóképlettel

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \begin{matrix} 1 - \sqrt{2}, \\ 1 + \sqrt{2}. \end{matrix}$$

A gyöktényezős alak

$$(x-1)(x-3)(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2}).$$

Megoldás [F4(b)]. Először próbáljuk egész gyököket keresni, ezek -14 osztói lehetnek.

$(7)^3 - 7(7)^2 + 2(7) - 14 = 0,$ tehát az $x_1 = 7$ gyök.

Mivel $(x-7)$ kiemelhető a polinomból, ezért

$$\begin{array}{ccccccccl} x^3 & - & 7x^2 & + & 2x & - & 14 & : x - 7 = x^2 + 2 \\ x^3 & - & 7x^2 & & & & & \\ \hline & & & + & 2x & - & 14 & \\ & & & + & 2x & - & 14 & \\ \hline & & & & & & 0 & \end{array}$$

$x^2 + 2$ negatív diszkriminánsú másodfokú polinom $D = \sqrt{0 - 4 \cdot 1 \cdot 2} < 0$, így nincs további valós gyöke. A szorzatalak

$$(x-7)(x^2+2).$$

F5. (Paraméteres gyökkeresés). A c valós szám mely értékére lesz az $x_1 = 1$ szám gyöke a $4x^4 + cx^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinomnak? Írjuk fel gyöktényezős alakban a polinomot!

Megoldás [F5]. A polinomba $x = 1$-et helyettesítve:

$4 \cdot 1^4 + c \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = c - 4$, tehát $c = 4$ esetén gyök az 1. A $4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ polinom lehetséges egész gyökei ± 1, behelyettesítve azt kapjuk, hogy $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$ is gyök.

Ekkor emeljük ki az $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ polinomot.

$$\begin{array}{ccccccccccl}
4x^4 & + & 4x^3 & - & 3x^2 & - & 4x & - & 1 & : x^2 - 1 = 4x^2 + 4x + 1 \\
4x^4 & & & - & 4x^2 & & & & & \\
\hline
& & 4x^3 & + & x^2 & - & 4x & - & 1 & \\
& & 4x^3 & & & - & 4x & & & \\
\cline{3-9}
& & & & x^2 & & & - & 1 & \\
& & & & x^2 & & & - & 1 & \\
\cline{5-9}
& & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

$4x^2+4x+1$ másodfokú polinom gyökei a megoldóképlet alapján $x_{3,4} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{8} = -\dfrac{1}{2}$, azaz kétszeres gyököt találtunk, azaz $4x^2 + 4x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$. Így

$$4x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 4x - 1 = (x-1)(x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)^2.$$