

A1 MINTA(A) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Határozzuk meg az alábbi függvény szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}.$$

(5 pont)

Megoldás. $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)}.$

A nevező zérushelyeiben a függvény nem értelmezett: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$, ezek a függvény szakadási helyei.

Ha $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{0}{0}$$

Mivel a 2 környezetében vizsgáljuk a függvényt ezért egyszerűsíthetünk

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 4}{x + 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Ugyanígy adódik $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 4}{x + 1} = 2.$

Tehát a két féloldali határérték létezik és megegyezik az értékük. Így a függvénynek hézagpontja (megszüntethető szakadása) van az $x = 2$ helyen.

Ha $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0^+} = \infty$$

vagy

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x - 2)(x + 4)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{h=x+1} \frac{(h - 3)(h + 3)}{(h - 3)h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h + 3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 + \frac{3}{h} = \infty$$

Ugyanígy adódik $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{-9}{-3 \cdot 0^-} = -\infty$

Tehát a két féloldali határérték $\pm\infty$ a szakadás lényeges (másodfajú), a függvénynek pólusa van az $x = -1$ helyen.

2. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

a) $\frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$ b) $\ln(\sin(2x))$.

(5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned} \text{a) } \left(\frac{2x^2 - 1}{x\sqrt{x^2 + 1}} \right)' &= \frac{4x \cdot x\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 - 1) \left(\sqrt{x^2 + 1} + x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{(x\sqrt{x^2 + 1})^2} = \\ &= \frac{4x^2\sqrt{x^2 + 1} - (2x^2 - 1) \left(\frac{x^2 + 1 + x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{x^4 + x^2} = \frac{4x^2\sqrt{x^2 + 1} - \left(\frac{4x^4 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)}{x^4 + x^2} = \\ &= \frac{(4x^4 + 4x^2) - (4x^4 - 1)}{(x^4 + x^2)\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{4x^2 + 1}{(x^4 + x^2)\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (\ln(\sin(2x)))' &= \frac{1}{\sin(2x)} \cdot (\sin(2x))' = \frac{1}{\sin(2x)} \cdot \cos(2x) \cdot (2x)' = \\ &= \frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)} = 2 \operatorname{ctg}(2x). \end{aligned}$$

3. Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és lokális szélsőértékeit!

$$f(x) = x \ln(x).$$

(5 pont)

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

A derivált zérushelye $\ln(x) + 1 = 0$, azaz $\ln(x) = -1$, $x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Ha $x < 1/e$, akkor $\ln(x) < -1$, így a derivált negatív, ha $x > 1/e$, akkor a derivált pozitív.

x	$(0, 1/e)$	$1/e$	$(1/e, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	\searrow	min	\nearrow

A lokális minimum értéke $-\frac{1}{e}$.

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozzuk meg!

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}.$$

(5 pont)

Megoldás. A függvénynek szakadási helye van az $x = 1$ -ben

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^+} = \infty,$$

tehát az $x = 1$ egyenes a függvény függőleges aszimptotája.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1,$$

tehát a függvénynek a $\pm\infty$ -ben is vízszintes aszimptotája az $y = 1$ egyenes.