A1 MINTA(B) 2. zárthelyi MEGOLDÁS

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}.$$

(5 pont)

Megoldás.

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \frac{\text{"}0\text{"}}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x(\sqrt{1+x+x^2}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3e^{3x}} = \frac{\infty}{\infty} \rightsquigarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{9e^{3x}} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

2. Írjuk fel az alábbi függvény $x_0 = 1$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = x^3\cos(3x-3).$$

(5 pont)

Megoldás. $f(0) = 1^3\cos(0) = 1.$

$f'(x) = 3x^2\cos(3x-3) - 3x^3\sin(3x-3).$

$f'(1) = 3\cdot 1^2\cos(0) - 3\cdot 1^3\sin(0) = 3.$

Az érintő egyenlete

$$y = 3(x-1)+1.$$

3. Ha egy adott termék előállítására x petákotköltünk, akkor azt később $10 + 12\sqrt{x}$ petákért tudjuk eladni. Mennyit költsünk az előállításra, hogy a termékenkénti hasznunk a lehető legtöbb legyen? (5 pont)

Megoldás. Egy terméken keletkezett hasznunk

$h(x) = (10 + 12\sqrt{x}) - x$, ahol $x \in (0, \infty)$ lehet. Ekkor keresve a $h(x)$ pozitív számokon vett globális maximumát $h'(x) = \dfrac{12}{2\sqrt{x}} - 1$.

A lokális szélsőérték keresésére meghatározzuk a függvényderivált zérushelyeit $\dfrac{12}{2\sqrt{x}} - 1 = 0$, ha $6 = \sqrt{x}$, azaz $x = 36$.

x	$(0, 36)$	36	$(36, \infty)$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$

Azaz $x = 36$-ban globális maximumhelye van a haszonfüggvénynek, értéke itt $10 + 12 \cdot 6 - 36 = 46$.

4. Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

(5 pont)

Megoldás. Az értelmezési tartomány $\mathbb{R}$. A konvexitás vizsgálatához határozzuk meg a függvény második deriváltját $f''(x) = (x^3 - 3x^2)'' = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$, ennek zéruzhelye $6x - 6 = 0$, azaz $x = 1$-ben van.

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$	$infl$	$\smile$