A1 2. zárthelyi (A) MEGOLDÁS 2022. november 22.

GTK Nemzetközi Gazdálkodás és Pénzügy Számvitel szakos hallgatóinak

1. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-1}\right)^{3x} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{x}.$$

Megoldás.

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+7}{x-1}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\frac{3x}{x-1}} = (e^8)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{x-1}} = (e^8)^3 = e^{24}.$ (3 pont)

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x\to 0} 2\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{1}{\cos(2x)} = 2\cdot 1\cdot 1 = 2.$

VAGY

$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(2x)}{x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos^2(2x)} = 2.$ (2 pont)

2. Írjuk fel az alábbi függvény $x_0 = 0$ ponthoz tartozó érintőjének egyenletét!

$$f(x) = e^{2x} + x^3 - 2.$$

Megoldás.

$f(0) = e^0 + 0^3 - 2 = 1 - 2 = -1.$ (1 pont)

$f'(x) = 2e^{2x} + 3x^2.$ (1 pont)

$f'(0) = 2e^0 + 3\cdot 0^2 = 2\cdot 1 + 0 = 2.$ (1 pont)

Az érintő egyenlete

$$y = 2(x-0) - 1 = 2x - 1.$$

(2 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőérték helyeit és azok értékét!

$$f(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}.$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (1 pont)

$\displaystyle f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2(x-1)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x+1)^3} = \frac{3-x}{(x+1)^3}$ (1 pont)

A derivált zérushelye $x = 3$, ha $x < 3$ a számláló pozitív, ha $x > 3$ a számláló negatív. A derivált nevezője pozitív, ha $x > -1$, negatív, ha $x < -1$. (1 pont)

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	3	$(3,\infty)$
f'	$-$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	*max*	$\searrow$

A lokális maximum értéke $\frac{1}{8}$. (2 pont)

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája? Ha igen, akkor határozzuk meg!

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Megoldás. $D_f = \mathbb{R}$, mivel $x^2+1 > 0$ minden $x \in \mathbb{R}$-re teljesül. A függvénynek nincs szakadási helye így nincsen függőleges aszimptóta (1 pont)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$, tehát a függvénynek a $\pm\infty$-ben nincs is vízszintes aszimptotája. (1 pont)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \text{"}\infty - \infty\text{"} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Ferde aszimptotája tehát a ∞-ben az $y = x + 0 = x$ egyenes. (2 pont)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{(-1)\,|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \text{"}\infty + (-\infty)\text{"} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = \frac{1}{\infty-(-\infty)} = 0.$$

Ferde aszimptotája a $-\infty$-ben az $y = -x$. (1 pont)