

# Matematika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

[belus@math.bme.hu](mailto:belus@math.bme.hu)

[geometria.math.bme.hu/bela-szilvia](https://geometria.math.bme.hu/bela-szilvia)

**3. előadás:**  
**Függvények alaptulajdonságai**  
**nevezetes függvények**

# Függvények

Egy **egyváltozós valós függvény**  $f : D_f \longrightarrow R_f$  a  $D_f$  és  $R_f$  valós számhalmazok között létesít megfeleltetést úgy, hogy minden  $x \in D_f$  elemhez **egyértelműen** rendel  $y = f(x) \in R_f$  elemet.

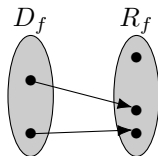
Jelölés:  $D_f$  - értelmezési tartomány,  $R_f$  - értékkészlet

$$f : x \mapsto f(x).$$

A függvények hozzárendelési típusai lehetnek:

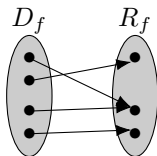
injektív

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$



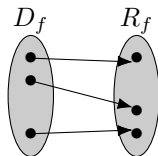
szürjektív

$$\forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$



bijektív(egy-egy értelmű)

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \wedge \forall y_1 \exists x_1 \Rightarrow y_1 = f(x_1)$$



# Abszolútérték függvény

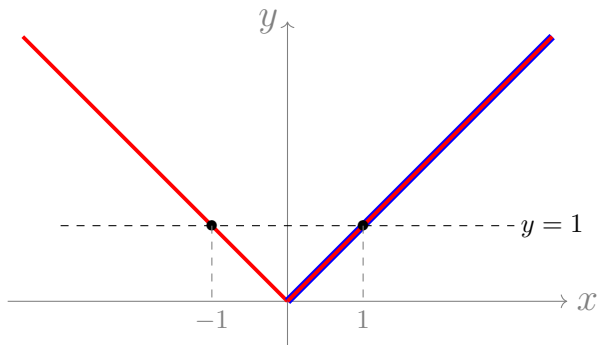
Példa:

$$f: x \mapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0. \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (D_f : (-\infty, \infty))$$

szürjektív, de nem injektív, például  $|1| = |-1| = 1$ .  
ugyanakkor a

$$g: x \mapsto |x|, \quad x \in \mathbb{R}^+ \quad (D_g : (0, \infty))$$

már injektív is, tehát  $g$  már bijektív.



## Függvénygrafikon

Ha  $f : x \mapsto f(x)$  valós függvény, akkor a  $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$  valós számpárok halmaza a függvény **grafikonjának** pontjai a koordináta-rendszerben.

Ha az  $(x, y)$  pont **illeszkedik** egy  $f$  valós függvény grafikonjára, akkor az adott pont koordinátái kielégítik az  $y = f(x)$  egyenletet.

Mivel a függvényhozzárendelésben minden  $x$  értékhez egyértelműen rendelünk  $y = f(x)$  értéket, ezért minden függőleges egyenes ( $x = c$ ) legfeljebb egyszer metszheti át a függvény grafikonját (**vertikális teszt**).

## Abszolútérték függvény

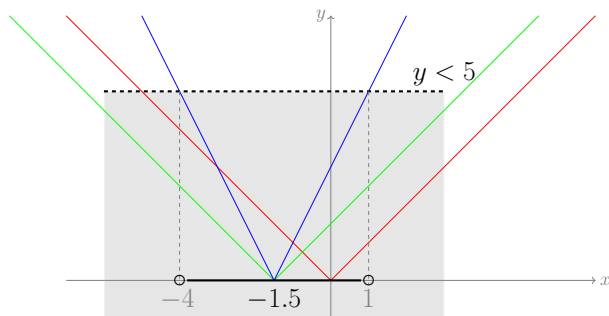
**Egy korábbi példa:** Oldjuk meg a  $|2x + 3| \leq 5$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

## Abszolútérték függvény

**Egy korábbi példa:** Oldjuk meg a  $|2x + 3| \leq 5$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

Függvénytranszformációkkal ábrázoljuk az

$f(x) = |2x + 3| = |2(x + 3/2)|$ -t. Az  $|x|$  jobbra tolásával kapjuk az  $|x + 3/2|$  grafikonját, ennek  $x$ -tengely irányú összenyomásával kapjuk  $|2x + 3|$  grafikonját. A grafikon  $y < 5$  vízszintes egyenes alatti területre eső része (megoldva a  $2x + 3 = \pm 5$  egyenleteket) a  $(-4, 1)$  intervallum felett helyezkedik el.



## Függvények értelmezési tartománya

Valós függvények természetes értelmezési tartományán azt a legbővebb valós számhalmazt értjük, melynek elemeire kiszámítható a függvényérték.

Néhány egyszerűbb függvény értelmezési tartománya és értékkészlete:

$f(x)$	$D_f$	$R_f$
$a \cdot x + b$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$x^2$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \infty)$
$1/x$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$



## Függvénykompozíció

Ha  $f : A \rightarrow B$  és  $g : B \rightarrow C$ , akkor

$$g \circ f : A \rightarrow C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

A  $g$  a **külső**, míg  $f$  a **belső függvény**.

Ha  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  és  $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$ ), akkor a  $g \circ f$  összetett függvény értelmezési tartománya:

$$\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ és } f(x) \in D_g\}.$$

**Példa:**  $f(x) = \sqrt{x}$  és  $g(x) = 2x + 1$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} + 1 \quad x \geq 0$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = \sqrt{2x + 1} \quad 2x + 1 \geq 0$$

## Függvények invertálása

Az  $f^{-1} : R_f \rightarrow D_f$  függvény az  $f : x \mapsto f(x)$ ,  $D_f \rightarrow R_f$  injektív függvény **inverze**, ha bármely  $y \in R_f$  elemhez azt az  $x$ -et rendeli hozzá, melyre  $f(x) = y$ .

Az  $f^{-1}$  inverz függvény értelmezési tartománya az  $f$  függvény értékkészlete.

A definícióból az következik, hogy  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$

Ha  $f$  függvény grafikonját tengelyesen tükrözzük az  $y = x$  egyenesre, akkor pontosan  $f^{-1}$  grafikonját kapjuk.

**Egyszerűbb példák:**

$f(x) = |x|$  nem injektív, így nincs inverze

$f(x) = x$  inverze önmaga:  $f^{-1}(x) = x$

$f(x) = ax + b$  inverze  $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$   $a \neq 0$  (köv. példa)

$f(x) = x^2$  nem injektív, de ha csak a  $[0, +\infty)$  intervallumon értelmezzük, akkor injektív, és az inverze:  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

# Függvények invertálása

Példa: Az  $f(x) = 3x + 1$  függvény inverze:

## Függvények invertálása

Példa: Az  $f(x) = 3x + 1$  függvény inverze:

$$f(x) = y$$

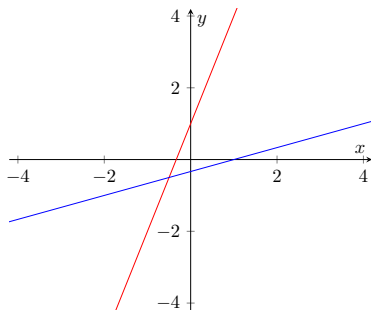
$$3x + 1 = y$$

$$3x = y - 1$$

$$x = \frac{y - 1}{3},$$

tehát  $f^{-1}(y) = \frac{y - 1}{3}$ , azaz

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{3}.$$



## Függvények invertálása

Példa: A  $g(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $x \geq 1$  függvény inverze

## Függvények invertálása

Példa: A  $g(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $x \geq 1$  függvény inverze

$$g(x) = y$$

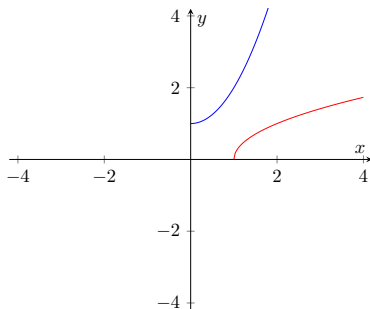
$$\sqrt{x-1} = y$$

$$y^2 = x-1$$

$$y^2 + 1 = x, x \geq 1 \rightarrow y \geq 0$$

tehát  $g^{-1}(y) = y^2 + 1$ ,  $y \geq 0$ , azaz

$$g^{-1}(x) = x^2 + 1, x \geq 0$$



## Monotonitás

Az  $f$  függvény egy  $I = (a, b) \subseteq D_f$  intervallumon

- **monoton nő**, ha  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- **szigorúan monoton nő**, ha  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- **monoton csökken**, ha  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .
- **szigorúan monoton csökken**, ha  $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .
- **monoton**, ha  $f(x)$  az  $I$ -n monoton nő vagy monoton csökken.
- **szigorúan monoton**, ha  $f(x)$  az  $I$ -n szigorúan monoton nő vagy szigorúan monoton csökken.

**Példák:**

$f(x) = x$  szigorúan monoton nő.

$g(x) = x^2$  szigorúan monoton csökken  $(-\infty, 0]$ -n és szigorúan monoton nő  $[0, +\infty)$ -n, de  $\mathbb{R}$ -en nem monoton.

Ha egy függvény monoton nő és monoton csökken egy intervallumon, akkor konstans függvény.

Az  $f : I = [a, b] \subseteq D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény

- **alulról korlátos**, ha van olyan  $k \in \mathbb{R}$ , hogy  $f(x) \geq k$  minden  $x \in I$  esetén ( $k$  **alsó korlát**).  $\rightsquigarrow$  **legnagyobb alsó korlát**
- **felülről korlátos**, ha van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , hogy  $f(x) \leq K$  minden  $x \in I$  esetén ( $K$  **felső korlát**).  $\rightsquigarrow$  **legkisebb felső korlát**
- **korlátos**, ha alulról és felülről korlátos, azaz van olyan  $K \in \mathbb{R}$ , hogy  $|f(x)| \leq K$  minden  $x \in I$  esetén.

**Példák:**

$f(x) = |x|$  alulról korlátos  $D_f$ -en, legnagyobb alsó korlát a 0, de felülről nem korlátos, így nem is korlátos.

$g(x) = \sin(x)$  alulról korlátos, legnagyobb alsó korlát  $-1$ , felülről korlátos, legkisebb felső korlát a 1, így korlátos is.



## Periodikus függvények

Az  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény **periodikus** ( $p$  szerint), ha létezik  $p \neq 0$  úgy, hogy  $x \in D_f$  esetén  $x \pm p \in D_f$  és  $f(x + p) = f(x)$ .

Ha egy függvény  $p$  szerint periodikus, akkor  $k \cdot p$  szerint is periodikus, ahol  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

A legkisebb pozitív számot, mely szerint  $f$  periodikus,  $f$  **periódusának** nevezzük (ha van).

**Példák:**

$\sin(x)$ ,  $\cos(x)$   $2\pi$  szerint periodikus

$\operatorname{tg}(x)$   $\pi$  szerint periodikus

$\{x\}$  törtrész  $= (x - [x])$  (egészrész) függvény 1 szerint periodikus

Egy példa, amikor nincs periódushossz, de a függvény periodikus:  
Dirichlet-függvény.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \end{cases}$$

## Paritás

Az  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D_f \subseteq \mathbb{R}$ ) függvény

- **páros**, ha  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$ , és  $f(-x) = f(x)$ .  
A grafikon az  $y$  tengelyre tükrös.
- **páratlan**, ha  $x \in D_f$  esetén  $-x \in D_f$ , és  $f(-x) = -f(x)$ .  
A grafikon az origóra tükrös.

Példák:

$x^2$ ,  $|x|$ ,  $\cos(x)$  páros

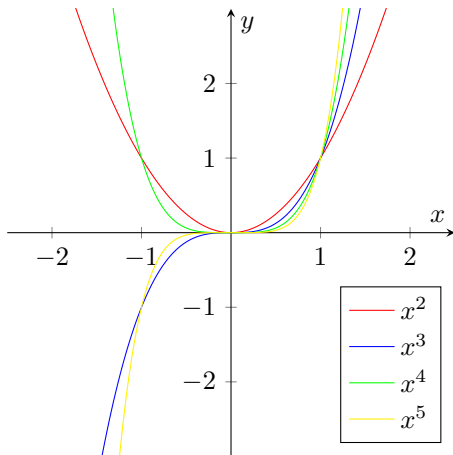
$x$ ,  $x^3$ ,  $\sin(x)$  páratlan

Páros függvények összege is páros, páratlan függvények összege is páratlan!

A paritás vizsgálatát csak akkor hajtjuk végre, ha az értelmezési tartomány az origóra szimmetrikusan helyezkedik el a számegyenesen.

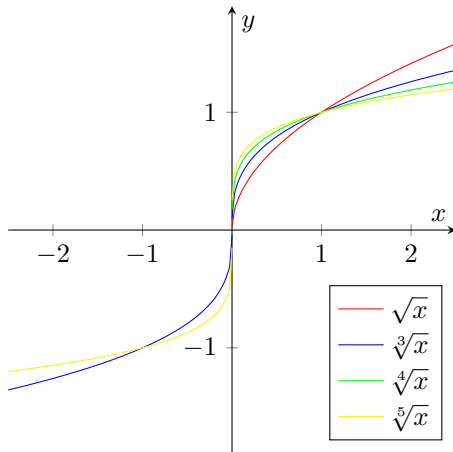
## Hatványfüggvények

Az  $x^n$  függvény ( $n \in \mathbb{Z}^+$ ) értelmezési tartománya  $D_{x^n} = \mathbb{R}$  a teljes valós számok halmaza. Grafikonja páros  $n$  esetén parabolához hasonlít, páros függvény. Páratlan  $n \geq 3$  esetén monoton növekvő a függvény, grafikonja az  $x^3$  grafikonjához hasonlít, páratlan függvény.



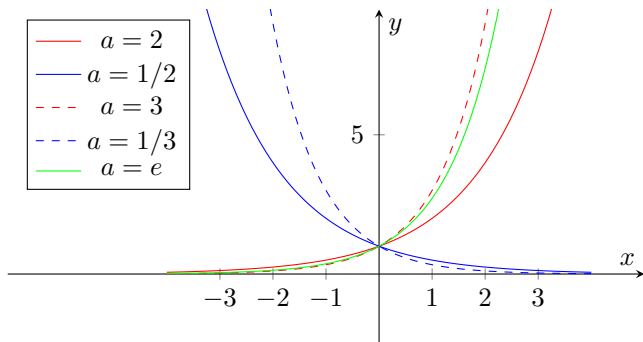
## Gyökfüggvények

Az  $\sqrt[n]{x}$  függvény páros  $n$  esetén csak a nemnegatív értékekre van értelmezve  $D_{\sqrt[n]{x}} = [0, \infty)$ . Páratlan  $n$  esetén  $D_{\sqrt[n]{x}} = \mathbb{R}$ , páratlan függvény. Minden  $n \in \mathbb{Z}^+$ -re a gyökfüggvények a teljes értelmezési tartományukon monoton növekedők.



## Exponenciális függvény

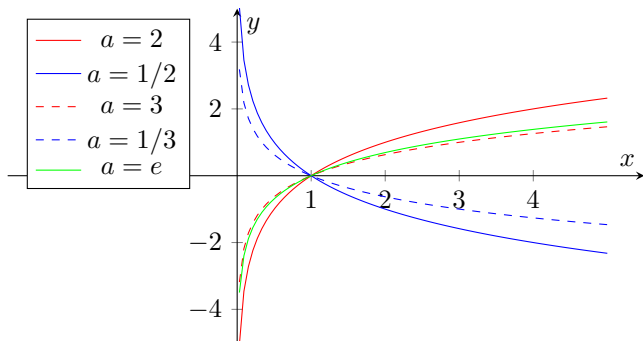
Az  $f(x) = a^x$  függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, ahol  $a > 0$  és  $a \neq 1$ . Értelmezési tartománya  $\mathbb{R}$ , még értékészlete  $(0, \infty)$ .  $a > 1$  esetén monoton növekvő, még  $a < 1$  esetén monoton csökkenő a függvény.



Az  $a = e = 2,718281828459\dots$  esetén „az” exponenciális függvény (jelölés:  $e^x$ ).

## Logaritmusfüggvény

Az  $f(x) = \log_a(x)$  függvényt " $a$ "-alapú logaritmusfüggvénynek nevezzük, ahol  $a > 0$  és  $a \neq 1$ . A logaritmusfüggvény az exponenciális függvény inverze. Ezért értelmezés tartománya a  $(0, \infty)$ , értékészlete  $\mathbb{R}$ .  $a > 1$  esetén monoton növekvő, még  $a < 1$  esetén monoton csökkenő a függvény.



Az  $a = e = 2,718281828459\dots$  esetén természetes alapú logaritmusfüggvény (jelölés még:  $\ln(x)$ ).

## Exponenciális és logaritmikus azonosságok

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{xy} = (a^x)^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

$$a^x b^x = (ab)^x$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

# Trigonometrikus függvények

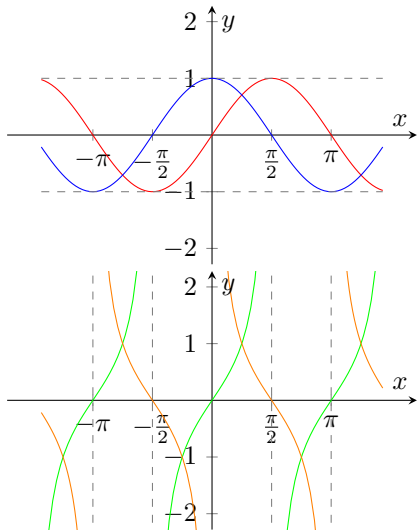
A  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$  függvények minden valós számon értelmezve vannak, periódikusak,  $p = 2\pi$  a periódushosszuk.

Korlátos függvények, alsó és felső korlátjaik:  $\pm 1$ .

A  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $\operatorname{ctg}(x)$  függvények periódikusak,  $p = \pi$  a periódushosszuk.

$D_{\operatorname{tg}} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , és minden periódusban monoton nő.

$D_{\operatorname{ctg}} = (0, \pi) + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , és minden periódusban monoton csökken.





## Sinus és Cosinus inverze

$\sin(x)$  nem injektív, de

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

tartományon már igen, itt vehetjük az inverzét:

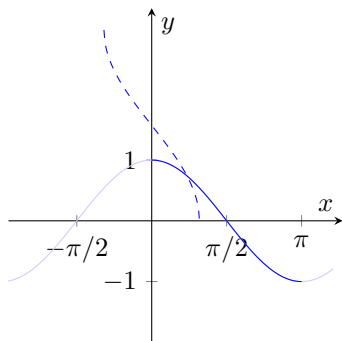
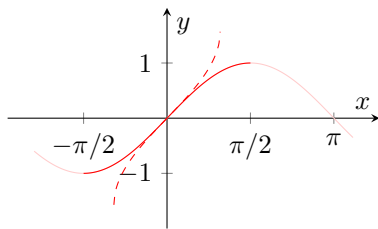
$$\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Hasolnlóan a  $\cos(x)$ ,

$$[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

tartományon már bijektív, itt vehetjük az inverzét:

$$\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



## Tangens, cotangens függvények inverze

A  $\mathbf{tg}(x)$  függvényt a  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.  
Itt az inverze:  $\mathbf{arctg}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

A  $\mathbf{ctg}(x)$  függvényt a  $(0, \pi)$ -re kell megszorítani, hogy injektív legyen.  
Itt az inverze:  $\mathbf{arcctg}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ .

