4. Gyakorlat
Numerikus sorozatok.

F1. (Korlátosság, monotonitás és konvergencia). Vizsgáljuk a sorozatok korlátosságát, monotonitását, konvergenciáját!

(a) $a_n = 3n + \dfrac{1}{n}$,

(b) $b_n = \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}}$,

(c) $c_n = \dfrac{2^{n+2-1}}{5^n}$.

Megoldás [F1(a)].

$$\begin{aligned}
a_n &\gtrless a_{n+1} \\
3n + \frac{1}{n} &\gtrless 3(n+1) + \frac{1}{n+1} \\
\frac{3n^2+1}{n} &\gtrless \frac{3(n+1)^2+1}{n+1} \\
(3n^2+1)(n+1) &\gtrless (3(n+1)^2+1)n \\
3n^3+3n^2+n+1 &\gtrless 3n^3+6n^2+4n \\
0 &< 3n^2+3n-1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növő.}
\end{aligned}$$

Felülről nem korlátos, mert $3n \to \infty$, $\dfrac{1}{n} \to 0$, így $\lim\limits_{n\to\infty} 3n + \dfrac{1}{n} = \infty$, a sorozat végtelenbe tartó (divergens). Alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $a_1 = 3 + \dfrac{1}{1} = 4$.

Megoldás [F1(b)]. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{3}{\sqrt{1+0}} = 3$, vizsgálva a monotonitást

$$
\begin{aligned}
b_n &\gtrless b_{n+1}\\
\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} &\gtrless \frac{3(n+1)}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\\
\frac{3n}{\sqrt{n^2+1}} &\gtrless \frac{3n+3}{\sqrt{n^2+2n+2}}\\
3n\sqrt{n^2+2n+2} &\gtrless (3n+3)\sqrt{n^2+1}\\
9n^2(n^2+2n+2) &\gtrless (9n^2+18n+9)(n^2+1)\\
9n^4+18n^3+18n^2 &\gtrless 9n^4+18n^3+18n^2+18n+9\\
0 &< 18n+9, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton növő.}
\end{aligned}
$$

Felülről korlátos, felső korlátja a határérték, a 3. Alsó korlátja a monotonitás miatt az első eleme $b_1 = \dfrac{3}{\sqrt{1+1}} = 3/\sqrt{2} \approx 2,1213$.

Megoldás [F1(c)]. A határérték $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+2}-1}{5^n} = \lim\limits_{n\to\infty} 4\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - \left(\dfrac{1}{5}\right)^n = 0 - 0 = 0$, vizsgálva a monotonitást

$$
\begin{aligned}
c_n &\gtrless c_{n+1}\\
\frac{2^{n+2}-1}{5^n} &\gtrless \frac{2^{n+3}-1}{5^{n+1}}\\
5(2^{n+2}-1) &\gtrless 2^{n+3}-1\\
5\cdot 2^{n+2} - 2^{n+3} &\gtrless 4\\
2^{n+2} &> \frac{4}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad \text{tehát monoton csökkenő.}
\end{aligned}
$$

Felülről korlátos, felső korlátja $a_1 = 7/5$. Alsó korlátja a monotonitás miatt a határérték: 0.

F2. (Sorozatok határértéke). Számítsuk ki az ismert határértékek felhasználásával!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 - 6n + \dfrac{1}{n}}{3n^5 - n^2 + 4}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{n} - \sqrt{3n} + 2}{\sqrt[4]{2n} + \sqrt{n} - 1}$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4n-3} - \sqrt{n+9}$,

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+1}\right)^{3n}$,

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)^{n+2}$.

Megoldás [F2(a)].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^3-6n+\dfrac{1}{n}}{3n^5-n^2+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\dfrac{6}{n^2}+\dfrac{1}{n^4}}{3n^2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{4}{n^3}} = \frac{5+0+0}{\infty+0+0} = 0.$$

Megoldás [F2(b)].

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n}-\sqrt{3n}+2}{\sqrt[4]{2n}+\sqrt{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{5}}-\sqrt{3}\cdot n^{\frac{1}{2}}+2}{\sqrt[4]{2}\cdot n^{\frac{1}{4}}+n^{\frac{1}{2}}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{\sqrt[10]{n^3}}-\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{n}}+1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\infty}-\sqrt{3}+\dfrac{2}{\infty}}{\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\infty}+1-\dfrac{1}{\infty}} = \frac{0-\sqrt{3}+0}{0+1-0} = -\sqrt{3}.$$

Megoldás [F2(c)].

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{4n-3}-\sqrt{n+9})\cdot\frac{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n-3-n-9}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-12}{\sqrt{4n-3}+\sqrt{n+9}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\sqrt{n}-\dfrac{12}{\sqrt{n}}}{\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{9}{n}}} =$$

$$= \frac{3\cdot\infty-12\cdot 0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{1+0}} = \frac{\infty-0}{2+1} = \infty.$$

Megoldás [F2(d)].

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-3}{n+1}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{4}{n+1}\right)^{n}\right)^{3} = (e^{-4})^3 = e^{-12} = \frac{1}{e^{12}}.$$

Megoldás [F2(e)].

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\dfrac{n+2}{n^2}}=(e^2)^0=e^0=1.$$

F3. (Rendőr-elv). Számítsuk ki a határértékeket a Rendőr-elv alkalmazásával!

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+3}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$.

Megoldás [F3(a)].

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+3}\underset{n>2}{<}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}=1$$

Megoldás [F3(b)].

$$3=\lim_{n\to\infty}3=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2\cdot 3^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot 3=1\cdot 3=3.$$