

5. Gyakorlat

Függvények határértéke, folytonossága.

F1. (Határértékszámítás). Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - 3x^2 + 7$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x^3 - 10x + 1},$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^2}{2x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^2}{2x - 6}, \quad \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x - x^2}{2x - 6},$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 4x^3 + x}{7 - x^2}, \quad (\text{hf})$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x} - 1},$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - x), \quad (\text{hf})$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}, \quad (\text{hf})$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(3x)},$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

F2. (Féloldali határértékeke). Számítsuk ki az $x_0 = 1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az alábbi függvénynek!

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 - 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}).$$

F3. (Szakadási helyek). Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\}, \\ 0, & \text{ha } x = 2, x = 5; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - x - 6}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\} \\ 1, & \text{ha } x = -2 \text{ vagy } x = 3 \end{cases} \quad (\text{hf}).$$