5. Gyakorlat
Függvények határértéke, folytonossága.

F1. (Határértékszámítás). Számítsuk ki a következő határértékeket!

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 7,$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^3-10x+1},$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x^2}{2x-6},\quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-x^2}{2x-6},\quad \lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{x-x^2}{2x-6},$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^4+4x^3+x}{7-x^2},$ **(hf)**

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1},$

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),$ **(hf)**

(g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2},$ **(hf)**

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)},$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}.$

Megoldás [F1(a)]. $\lim\limits_{x\to\infty} x^3-3x^2+7 = \infty-\infty = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\cdot(1-\dfrac{-3}{x}+\dfrac{7}{x^3}) = \infty\cdot(1+0+0) = \infty.$

Megoldás [F1(b)]. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+3x+1}{x^3-10x+1} = \dfrac{\infty}{-\infty} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{x-\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{1+0+0}{-\infty-0+0} = 0.$

Megoldás [F1(c)]. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-x^2}{2x-6} = \dfrac{0-0}{0-6} = \dfrac{0}{-6} = 0,$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-x^2}{2x-6} = \frac{\infty-\infty}{\infty} \lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2-\dfrac{6}{x}} = \frac{1-\infty}{2-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x-x^2}{2x+6} = \frac{0}{0} \underset{x=3+h,\,h>0}{=} \lim_{h\to 0+} \frac{(3+h)-(3+h)^2}{2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{-6-5h-h^2}{2h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+} -6-5h-h^2 \lim_{h\to 0+} \frac{1}{2h} = (-6)\cdot\infty = \infty = -\infty.$$

Megoldás [F1(d)]. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4+4x^3+x}{7-x^2}=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+4x+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{7}{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x(x+4)+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{7}{x^2}-1}=$

$\dfrac{-\infty\cdot-\infty+0}{0-1}=\dfrac{\infty}{-1}=-\infty.$

Megoldás [F1(e)]. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2}}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x-1+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2}{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x+x^2)(\sqrt{1+x}+1)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x^2})}=$

$=\dfrac{1\cdot(1+1)}{1+1}=1.$

Megoldás [F1(f)]. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\infty\cdot(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{\infty}{\infty+\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\dfrac{1}{2}.$

Megoldás [F1(g)]. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\dfrac{x^2}{x-1}}=(e^2)^\infty=\infty.$

Megoldás [F1(h)]. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(7x)}{\sin(3x)}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(7x)}{7x}\dfrac{3x}{\sin(3x)}\dfrac{7}{3}=1\cdot1\cdot\dfrac{7}{3}=\dfrac{7}{3}$

Megoldás [F1(i)]. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2(x/2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}2\cdot\left(\dfrac{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{x}{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{4}=2\cdot1^2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}.$

F2. (Féloldali határértékek). Számítsuk ki az $x_0=1$ pontban a jobb és bal oldali határértékét az alábbi függvénynek!

$$f(x)=\frac{x^2+x-1}{x^3-1}\qquad(x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}).$$

Megoldás [F2]. $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^2+x-1}{x^3-1}\underset{x=1+h}{=}\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{(1+h)^2+(1+h)-1}{(1+h)^3-1}=\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h^2+3h+1}{h^3+3h^2+3h}=$

$\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{1}{h}\cdot\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{h^2+3h+1}{h^2+3h+3}=\infty\cdot\dfrac{0+0+1}{0+0+3}=\infty.$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^2+x-1}{x^3-1} \underset{x=1-h}{=} \lim_{h\to 0-}\frac{(1-h)^2+(1-h)-1}{(1-h)^3-1} = \lim_{h\to 0-}\frac{h^2-3h+1}{-h^3+3h^2-3h} =$$

$$= \lim_{h\to 0-}\frac{1}{h}\cdot\lim_{h\to 0-}\frac{h^2-3h+1}{-h^2+3h-3} = \infty\cdot\frac{0+0+1}{0+0-3} = -\infty.$$

F3. (Szakadási helyek). Határozzuk meg az alábbi függvények szakadási helyeit és azok fajtáit:

$$(a)\ \ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{2,5\},\\[2mm] 0, & \text{ha } x=2,\ x=5;\end{cases}$$

$$(b)\ \ f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\[2mm] 1, & \text{ha } x=0.\end{cases}$$

$$(c)\ \ f(x) = \left.\begin{cases} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6}, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}\\[2mm] 1, & \text{ha } x=-2 \text{ vagy } x=3\end{cases}\right\}\ \ \textbf{(hf)}.$$

Megoldás [F3(a)]. $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-5} & x\neq 2,5\\[2mm] 0 & x=2 \text{ vagy } x=5\end{cases}$

$$\lim_{x\to 2\pm}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} = \lim_{x\to 2\pm}\frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{1}{3},$$

$x_0 = 2$-ben a két féloldali határérték egyenlő, a szakadás megszűntethető.

$$\lim_{x\to 5+}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} \underset{x=5+h}{=} \lim_{h\to 0+}\frac{(5+h)-3}{h} = 2\cdot\infty = \infty.$$

$$\lim_{x\to 5-}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10} \underset{x=5-h}{=} \lim_{h\to 0+}\frac{(5-h)-3}{-h} = 2\cdot -\infty = -\infty.$$

$x_0 = 5$-ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus.

Megoldás [F3(b)]. $\displaystyle\lim_{x\to 0+} e^{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0,$

$$\lim_{x\to 0-} e^{1/x} = \lim_{x\to 0-}\frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{e^{-\infty}} = \frac{1}{0+} = \infty,$$

$x_0 = 0$-ban a két féloldali határérték nem egyenlő, a szakadás nem megszűntethető.

Megoldás [F3(c)]. $f(x) = \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} = \dfrac{(2x-1)(x-3)}{(x+2)(x-3)} = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+2} & x \neq -2, 3 \\ 1 & x = -2 \text{ vagy } x = 3 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -2+} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} \underset{x=-2+h}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{2(-2+h)-1}{h} = -5 \cdot \infty = -\infty.$$

$$\lim_{x \to -2-} \frac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} \underset{x=-2-h}{=} \lim_{h \to 0+} \frac{2(-2-h)-1}{-h} = -5 \cdot -\infty = \infty.$$

$x_0 = -2$-ben a két féloldali határérték $\pm\infty$, a szakadás pólus. $\lim\limits_{x \to 3\pm} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x \to 3\pm} \dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{6-1}{3+2} = \dfrac{5}{5} = 1,$

$x_0 = 3$-ben a két féloldali határérték egyenlő, pontosan 1, ami azonos a függvényértékkel, nincs szakadás.