

Matematika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia

belus@math.bme.hu

geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

**6. előadás:
Függvényhatárértékek,
Az átviteli-elv,
Végtelenbe tartás**

Határérték definíciója

Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az x_0 pontban a **határértéke** A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, ha $|x - x_0| < \delta$ ahol $x \neq x_0$ és $x \in D_f$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.

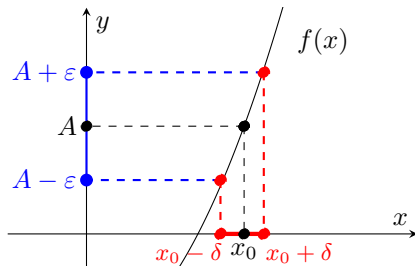
Jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

vagy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A.$$

Nem követeljük meg, hogy a függvény x_0 -ban értelmezve legyen.



Példa

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Mennyi a határértéke $x_0 = 2$ -ben?

Példa

Az $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ függvény értelmezési tartománya:

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Mennyi a határértéke $x_0 = 2$ -ben?

$$f(x) = \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2}$$

Ha $x \neq 2$, akkor $f(x) = 2x + 1$, így $2x + 1 \approx 5$, ha x közelít 2-höz.

Definiálhatnánk így is a függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{ha } x \neq 2 \\ \text{nincs értelmezve,} & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

Sejtjük, hogy $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. A definíció alapján

$$\left| \frac{(2x + 1)(x - 2)}{x - 2} - 5 \right| < \varepsilon \quad x \neq 2$$

$$|2x - 4| < \varepsilon$$

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta \text{ jó lesz!}$$

Az egészrész függvény

Mi a helyzet az $f(x) = [x] = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x < k + 1\}$ egészrész függvénnyel $x_0 = 2$ -ben?

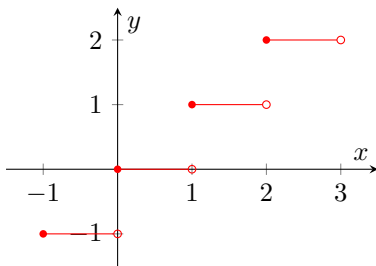
Ha $|x - 2| < \delta < 1$ és $x \neq 2$, akkor

$f(x) = 2$, ha $x > 2$, és

$f(x) = 1$, ha $x < 2$.

Tehát $|f(x) - A| < \varepsilon < \frac{1}{2}$ nem teljesül sem $A = 1$ -gyel, sem $A = 2$ -vel.

Így a határérték nem létezik.



Jobb és bal oldali határérték

Érdeemes külön tekinteni a két oldalt:

Jobb oldali határérték ($x_0 < x$):

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 pontban a jobb oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = A$.

Bal oldali határérték ($x < x_0$):

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 pontban a bal oldali határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jelölés: $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = A$.

Előző példában: $\lim_{x \rightarrow 2-} [x] = 1$, és $\lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$.

Határérték egyértelmősége

Tétel: Ha az f függvénynek x_0 pontban léteznek a jobb és bal oldali határértéke, és ezek egyenlők, akkor a függvénynek létezik az x_0 pontban határértéke, és ez megegyezik a jobb és bal oldali határértékekkel.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Tétel: Ha létezik a határérték, akkor egyértelmű:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = B \text{ esetén } A = B.$$

Indirekt bizonyítás: $\varepsilon = \frac{|A - B|}{3}$ -hoz nincs jó δ ,

hasonlóan, mint a sorozatoknál ε -hoz nincsen N_ε .

Egy függvénynek x_0 -ban A a határértéke akkor és csak akkor, ha **bármely** $\{x_n\}$ sorozatra, mely $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, $x_n \in D_f$, igaz lesz, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

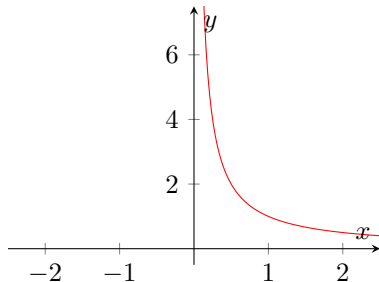
Ezek alapján belátható, hogy csak úgy, mint a sorozatoknál, ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = A \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} g(x) = B \text{ és } A, B \in \mathbb{R}, \text{ akkor}$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) \pm g(x) = A \pm B$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ feltéve, hogy $g(x) \neq 0$ és $B \neq 0$.

Végtelen határérték

Mi a helyzet az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénnyel a 0 pont jobb oldalán?
Minél közelebb vagyunk a 0-hoz, annál nagyobb a függvény, végtelenhez tart.



Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke jobbról** ∞ , ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < x - x_0 < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

Végtelen határérték – variációk

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobbról/balról)** $+\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$ ($x > x_0/x < x_0$) esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = +\infty$$

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek az x_0 **pontban a határértéke (jobbról/balról)** $-\infty$, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hoz van olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta$, ($x > x_0/x < x_0$) esetén $x \in D_f$ és $f(x) < K$.

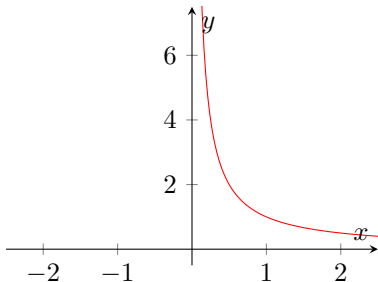
$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow x_0(\pm)} f(x) = -\infty$$

Példában $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = \infty$ DE $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Továbbá $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$.

Határérték a végtelenben

Nem csak a határérték lehet végtelen, hanem a végtelenben is vizsgálhatjuk a függvény viselkedését.

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ függvénnyel a ∞ -ben 0-hoz tart.



Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek a ∞ -ben a **határértéke** A , ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy $L_\varepsilon < x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Végtelenben végtelen

Lehetséges, hogy a végtelenben a függvény (\pm) végtelenhez tart:

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény $a\infty$ -**ben** $(-)\infty$ -**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy $L_K < x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = (-)\infty$$

Hasonlóan a $-\infty$ -ben:

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvénynek a $-\infty$ -**ben a határértéke** A , ha minden $\varepsilon \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$, hogy $L_\varepsilon > x$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$$

Az $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ valós függvény a $-\infty$ -**ben** $(-)\infty$ -**hez tart**, ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez van olyan $L_K \in \mathbb{R}$, hogy $L_K > x$ esetén $x \in D_f$ és $f(x) > K$ ($f(x) < K$).

$$\text{Jelölés: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = (-)\infty$$

Összefoglalás

Az $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvénynek

az x_0 pontban a
az x_0 pontban a jobb oldali
az x_0 pontban a bal oldali
a $+\infty$ -ben a
a $-\infty$ -ben a

határértéke $A \in \mathbb{R}$,
 $+\infty$,
 $-\infty$,

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz
 $K \in \mathbb{R}$ -hez
 $K \in \mathbb{R}$ -hez

van olyan $\delta > 0$,
 $\delta > 0$,
 $\delta > 0$,
 $L_\varepsilon \in \mathbb{R}$,
 $L_K \in \mathbb{R}$,

hogy $0 < |x - x_0| < \delta$
 $0 < x - x_0 < \delta$
 $0 < x_0 - x < \delta$ esetén $x \in D_f$ és
 $L_\varepsilon < |x|$
 $L_K < |x|$

$|f(x) - A| < \varepsilon$.
 $f(x) > K$.
 $f(x) < K$.