6. Gyakorlat
Differenciálszámítás.

F1. (Függvények deriváltja). Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját!

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 11$

(b) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$

(c) $f(x) = e^x - \cos x$

(d) $f(x) = (1 + x^3)\mathrm{tg}x$

(e) $f(x) = x^2 \sin x$ **(hf)**

(f) $f(x) = \dfrac{x^3}{\ln x}$ **(hf)**

(g) $f(x) = \mathrm{ch}x$

(h) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{x - 2}$

(i) $f(x) = \dfrac{(x + 5)\mathrm{sh}x}{12}$ **(hf)**

(j) $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{5}$

Megoldás [F1(a)].

$$f'(x) = (x^3 - 5x^2 + 5x + 11)' = (x^3)' - 5(x^2)' + 5(x)' + (11)' = 3x^2 - 5(2x) + 5 + 0 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Megoldás [F1(b)].

$$f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{5x^5}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-2} - \frac{1}{5}x^{-5}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-3} - \frac{1}{5} \cdot (-5)x^{-6} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}.$$

Megoldás [F1(c)].

$$f'(x) = (e^x - \cos x)' = e^x - (-\sin x) = e^x + \sin x.$$

Megoldás [F1(d)].

$$f'(x) = ((1 + x^3)\mathrm{tg}x)' = (1 + x^3)'\mathrm{tg}x + (1 + x^3)\mathrm{tg}'x = (0 + 3x^2)\mathrm{tg}x + (1 + x^3)\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Megoldás [F1(e)].

$$f'(x) = (x^2 \sin x)' = (x^2)' \sin x + x^2(\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x.$$

Megoldás [F1(f)].

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{\ln x}\right) = \frac{(x^3)' \ln x - x^3 \ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{3x^2 \ln x - x^3 \dfrac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{\ln^2 x}.$$

Megoldás [F1(g)].

$$f'(x) = (\mathrm{ch}x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x.$$

Megoldás [F1(h)].

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2}{x - 2}\right) = \frac{(x^3 + 2)'(x - 2) - (x^3 + 2)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \frac{3x^2(x - 2) - (x^3 + 2) \cdot 1}{(x - 2)^2} =$$
$$= \frac{3x^3 - 6x^2 - x^3 - 2}{(x - 2)^2} = \frac{2x^3 - 6x^2 - 2}{(x - 2)^2}.$$

Megoldás [F1(i)].
$$f'(x)=\left(\frac{(x+5)\,\mathrm{sh}x}{12}\right)'=\frac{1}{12}\left((x+5)'\,\mathrm{sh}x+(x+5)\,\mathrm{sh}'x\right)=\frac{1}{12}\left(\mathrm{sh}x+(x+5)\,\mathrm{ch}x\right).$$
Megoldás [F1(j)].
$$f(x)=\frac{\ln^2 x}{5}=\frac{1}{5}(\ln' x\ln x+\ln x\ln' x)=\frac{2}{5}\frac{\ln x}{x}\ \text{vagy}=\frac{1}{5}2\cdot\ln x\ln' x=\frac{2}{5}\frac{\ln x}{x}.$$
F2. (Érintők).

(a) Legyen
$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}\qquad (x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}).$$
Számítsuk ki $f'(x)$-et. Mennyi az $x_0=1$ pontban az érintő iránytangense? Írjuk fel az $x_0=1$ pontban az érintőegyenes egyenletét.

(b) Írjuk fel az $f(x)=\sin(x)$ függvény grafikonjához húzott érintő egyenes egyenletét az $x_0=\pi$ pontban. Lesz-e a függvénynek vízszintes érintője?

(c) **(hf)** Írjuk fel az $f(x)=(x^2+1)e^x$ függvény $x_0=0$ pontjához tartozó érintő egyenletét.

Megoldás [F2(a)]. $f'(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)'=\dfrac{(-1)(1+x)-(1-x)(1)}{(1+x)^2}=\dfrac{-2}{(1+x)^2}$.
Ha $x_0=1$, akkor $f'(1)=\dfrac{-2}{(1+1)^2}=-\dfrac{1}{2}$ az iránytangens nagysága. Így az érintő egyenlete $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Azaz $y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+0$.

Megoldás [F2(b)]. $f'(x)=(\sin x)=\cos(x)$, $f'(\pi)=\cos(\pi)=-1$, $f(\pi)=\sin\pi=0$, tehát az érintő egyenlete $y=(-1)(x-\pi)+0=\pi-x$.

Az érintő akkor vízszintes, ha $f'(x_0)=0$. Keressük a derivált függvény zérushelyeit. $f'(x)=\cos x=0$, ha $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, ahol $k\in\mathbb{Z}$. Ezekben a pontokban az érintő vízszintes, meredeksége 0. Például az $x_0=\dfrac{\pi}{2}$-ben az egyenlet $y=0(x-\pi/2)+\sin(\pi/2)=1$.

Megoldás [F2(c)]. $f'(x)=((x^2+1)e^x)'=2xe^x+(x^2+1)e^x$, $f'(0)=2\cdot 0^0+(0^2+1)e^0=0+1=1$, $f(0)=(0^2+1)e^0=1$. Tehát az érintő egyenlete $y=1(x-0)+1=x+1$.

F3. (Láncszabály.) Az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

(a) $(3x^2+4x+1)^5$,

(b) $(1+\sqrt[3]{x})^3$,

(c) $\sqrt{x^2+1}$ **(hf)**

(d) e^{x^4}, **(hf)**

(e) $\cos\left(e^{2x+3}\right)$.

Megoldás [F3(a)].

$f'(x) = ((3x^2+4x+1)^5)' = 5(3x^2+4x+1)^4 \cdot (6x+4).$

Megoldás [F3(b)].

$f'(x) = \left((1+\sqrt[3]{x})^3\right)' = 3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot (0+\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}) = 3\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}.$

Megoldás [F3(c)].

$f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

Megoldás [F3(d)].

$f'(x) = \left(e^{x^4}\right)' = e^{x^4} \cdot (x^4)' = e^{x^4}4x^3.$

Megoldás [F3(e)].

$f'(x) = (\cos\left(e^{2x+3}\right))' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot \left(e^{2x+3}\right)' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot e^{2x+3} \cdot (2x+3)' = -\sin\left(e^{2x+3}\right) \cdot e^{2x+3} \cdot 2.$