Matemaika A1 előadás

GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

7. elődás:
Nevezetes függvényhatárértékek,
Hiperbolikusz függvények és inverzeik,
Folytonosság, szakadási pontok

Nevezetes határértékek

Polinomfüggvények: $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \quad D_f = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0, \\ -\infty & a_n < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \begin{cases} \infty & a_n > 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n < 0,\ n \text{ páratlan} \\ -\infty & a_n < 0,\ n \text{ páros, vagy } a_n > 0,\ n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

Példa: $\lim\limits_{x\to\infty} -x^2 + 4x + 1 = -\infty = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^2 + 4x + 1$

Racionális tört függvények: $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, ahol p, q polinomok,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) = 0\}.$$

Példa:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2+3}{2^2-1} = \frac{5}{3}, \qquad \lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{-3+3}{(-3)^2-1} = \frac{0}{8} = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+3/x}{x-1/x} = \frac{1+0}{\infty - 0} = 0$$

Példa - Féloldali határérték

$$\lim_{x\to 1+} \frac{x+3}{x^2-1} =$$

legyen $x = 1 + h$, ahol $h > 0$, ha $x \to 1+$ akkor $h \to 0+$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h^2+2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h(h+2)} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{h+4}{h+2} = \infty \cdot 2 = \infty.$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{x+3}{x^2-1} =$$

legyen $x = 1 - h$, ahol $h > 0$, ha $x \to 1-$ akkor $h \to 0+$

$$= \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h^2-2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h(h-2)} = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \lim_{h\to 0+} \frac{4-h}{h-2} = \infty\cdot(-2) = -\infty.$$

Nevezetes határértékek

Gyökfüggvény: $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $D_f = [0, \infty)$ és $n \in \mathbb{Z}^+$. Monoton növő, nem korlátos felülről.

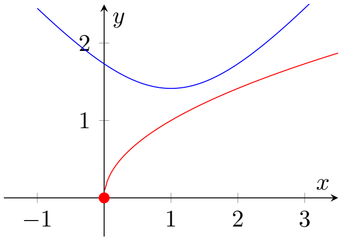
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 0+} \sqrt[n]{x} = 0.$$

Példa:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \\ = \lim_{x \to \infty} \sqrt{(x-1)^2 + 2} = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \infty$$

$$\lim_{x \to -2\pm} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \sqrt{11}$$



Nevezetes határértékek

Exponenciális függvény: $f(x) = a^x$, $a > 0$, $\quad D_f = \mathbb{R}$.

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0 \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \infty.$$

Példa: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} 2^{-x^2+4x+1} = 2^{-\infty} = 0$

Logaritmus függvény: $f(x) = \log_a(x)$, $\quad D_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

$$\text{ha } a > 1 \quad \lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = -\infty.$$

$$\text{ha } a < 1 \quad \lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty \quad \lim_{x\to 0+} \log_a(x) = \infty.$$

Példa: $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \log_2(x^2 - 2x + 3) = \log_2(\infty) = \infty$

Nevezetes határértékek - Hyperbolikus függvények

Sinus hyperbolikus:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ D_{\mathrm{sh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, páratlan.

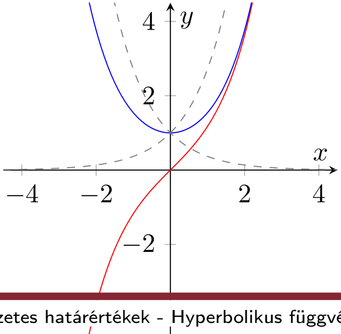
$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$$

Cosinus hyperbolikus:

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ D_{\mathrm{ch}} = \mathbb{R}.$$

Alulról korlátos, páros.

$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{ch}(x) = \infty$$



$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Tangens hyperbolikus:

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)},\ D_{\mathrm{th}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, korlátos, páratlan.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$$

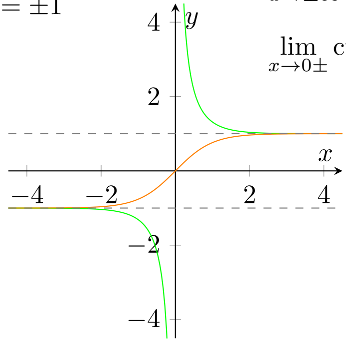
Cotangens hyperbolikus:

$$\mathrm{cth}(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)},\ D_{\mathrm{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Monoton csökkenő, páros.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{cth}(x) = \pm 1$$

$$\lim_{x\to 0\pm} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$$



Nevezetes határértékek - Area függvények

Area sinus hyperbolikus:

$$\mathrm{sh}^{-1}(x) = \mathrm{arsh}(x),\ D_{\mathrm{arsh}} = \mathbb{R}.$$

Monoton növő, páratlan.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{arsh}(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{arsh}(x) = -\infty$$

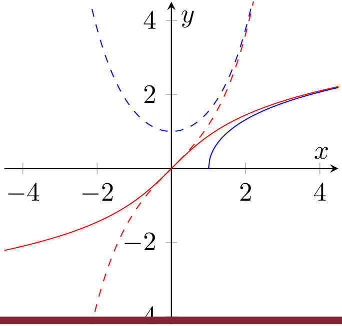
Area cosinus hyperbolikus:

$$\mathrm{ch}^{-1}(x) = \mathrm{arch}(x),\ D_{\mathrm{arch}} = [1,\infty).$$

Monoton növő.

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{arch}(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 1+} \mathrm{arch}(x) = 0$$



Area függvények logaritmikus alakja

Az sh függvény injektív, fejezzük ki az $\operatorname{sh}(x) = y$ egyenlet segítségével az inverz hozzárendelési szabályát:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y \\
e^x - e^{-x} &= 2y \\
(e^x)^2 - 2y \cdot (e^x) - 1 &= 0 \\
a^2 - 2y \cdot a - 1 &= 0 \\
a_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} &= y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad = e^x, \text{ ha } y \pm \sqrt{y^2+1} > 0, \\
\ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) &= x.
\end{aligned}$$

$$\operatorname{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Nevezetes határértékek - Area függvények

Area tangens hyperbolikus:

$$\mathrm{th}^{-1}(x) = \mathrm{arth}(x),$$

$$D_{\mathrm{arth}} = (-1, 1).$$

Monoton növő, páratlan.

$$\lim_{x \to 1-} \mathrm{th}(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \to -1+} \mathrm{th}(x) = -\infty$$

Area cotangens hyperbolikus:

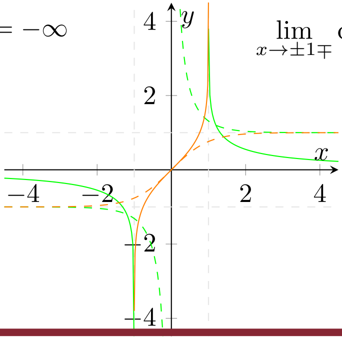
$$\mathrm{cth}^{-1}(x) = \mathrm{arcth}(x)$$

$$D_{\mathrm{arcth}} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Monoton csökkenő, páros.

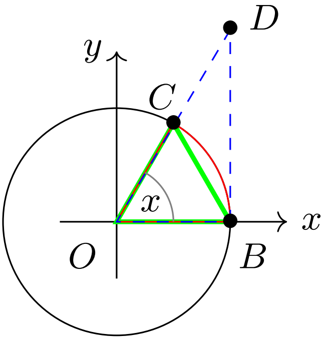
$$\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{cth}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \pm 1\mp} \mathrm{cth}(x) = \pm\infty$$



Nevezetes határértékek

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$



$$\begin{array}{ccccccc}
T_{\triangle OCB}=\dfrac{\sin(x)\cdot 1}{2} & < & T_{\sphericalangle BC}=\dfrac{x}{2\pi}\cdot\pi & < & T_{\triangle OBD}=\dfrac{1\cdot \mathrm{tg}(x)}{2} & \\
\sin(x) & < & x & < & \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} & \\
1 & < & \dfrac{x}{\sin(x)} & < & \dfrac{1}{\cos(x)} & \text{Rendőr-elv} \\
\downarrow & & x\longrightarrow 0 & & \downarrow & \\
1 & & & & 1 &
\end{array}$$

Nevezetes határértékek

Az "e" szám

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$ a függvény határértéke a végtelenben e.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Példa

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^{2x+2} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{6}{x-1}\right)^{x-1}\right)^{\dfrac{2x+2}{x-1}} = (e^6)^2 = e^{12}.$$

Pontbeli folytonosság

Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha a függvény határértéke és a függvény értéke megegyezik x_0-ban:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

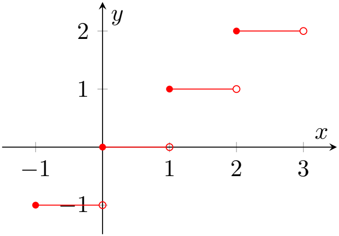
Ekvivalens definíció:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $|x - x_0| < \delta$ esetén $x \in D_f$ és $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Hasonlóan egyoldali folytonosság:
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **jobbról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.
Az $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}$) függvény **balról folytonos** az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

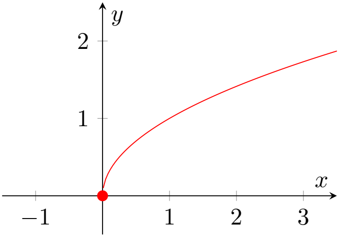
Ha egy függvény egy pontjában jobbról és balról is folytonos, akkor folytonos abban a pontban.

Példák

$f(x) = [x]$ függvény az egész helyeken jobbról folytonos, de balról nem.



$f(x) = \sqrt{x}$ függvény a 0-ban csak jobbról folytonos, hiszen csak jobbról van értelmezve.



Függvények folytonossága

Általában egy $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ $(D_f \subseteq \mathbb{R})$ **függvény folytonos**, ha minden $x_0 \in D_f$ pontban folytonos.

Az $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos, ha minden $x_0 \in (a,b)$ pontban folytonos, és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos.

Példák:

$x, x^2, |x|, e^x, \sin x, \dfrac{1}{x}$ folytonosak a teljes értelmezési tartományukon.

$[x]$ függvény csak az egész pontokon kívül folytonos. Az egész értékekben csak jobbról folytonos.

A Diriclet-függvény sehol sem folytonos.

Példa

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2 - 3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

Példa

Határozzuk meg az a paraméter értékét, hogy az alábbi függvény folytonos legyen.

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x < 2 \\ a, & \text{ha } x = 2 \\ x^2-3, & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

A függvény az $x \neq 2$ pontokban folytonos.
Az $x = 2$ pontban:

$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} x - 1 = 1$$
$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} x^2 - 3 = 1,$$

A függvény pontosan akkor folytonos $x = 2$-ben, ha $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$.
Tehát az kell, hogy $a = f(2) = 1$ legyen.