7. Gyakorlat
Szélsőértékek, monotonitás.

F1. (Monotonitás, szélsőérték.) Határozzuk meg az alábbi függvény monotonitási intervallumait, lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2+1}, \qquad x \in \mathbb{R},$

(b) $f(x) = x - \ln(1+x) \qquad x \in (-1, +\infty),$

(c) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

Megoldás [F1(a)]. $f'(x) = \dfrac{3x^2(3x^2+1) - x^3 \cdot 6x}{(3x^2+1)^2} = \dfrac{3x^4+3x^2}{(3x^2+1)^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ így a függvény monoton növő $\mathbb{R}$-en és ott szigorúan monoton növő, mivel a derivált csak 0-ban lesz 0. $f'(x) = 0$, ha $x = 0$, de ott a deriváltfüggvény nem vált előjelet, tehát nincs szélsőértéke.

Megoldás [F1(b)]. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$, így $f' < 0$, ha $x < 0$ és $x > -1$, valamint $f' > 0$ ha $x < -1$ vagy $x > 0$. $f' = 0$, ha $x = 0$, itt f' negatívból pozitív értékekbe vált, tehát lokális minimuma van a függvénynek. Értéke $f(0) = 1 - \ln(1) = 1$.

Megoldás [F1(c)]. $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x^2 - 4x + 3) = 5x^2(x-3)(x-1)$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő			lok.max.	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő

Lokális maximum értéke: $f(1) = 2$, lokális minimum értéke $f(3) = 26$.

F2. (Globális szélsőértékek.) Határozzuk meg az adott intervallumon az alábbi függvények abszolút maximumát és minimumát (ha azok léteznek), és mondjuk meg azt is, hogy hol veszi fel a szélsőértékeket.

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \qquad x \in [-1, 5]$

(b) $f(x) = 2x + \dfrac{200}{x} \qquad x \in (0, \infty)$

Megoldás [F2(a)]. $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x-1)(x+2)$

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	(14)	mon.csökk.	lok.min. (-6)	mon.nő	(266)	mon.nő

Globális maximum értéke: $f(5) = 266$, globális minimum értéke $f(1) = 6$ megegyezik a lokális minimummal.

Megoldás [F2(b)]. $f'(x) = 2 - \dfrac{200}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 200}{x^2}$

x	$(-\infty,-10)$	-10	$(-10,0)$	0	$(0,10)$	10	$(10,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	n.é.	$-$	0	$+$
$f(x)$	mon.nő	lok.max.	mon.csökk.	n.é.	mon.csökk.	lok.min.(40)	mon.nő

$\lim\limits_{x\to 0+} 2 + \dfrac{200}{x} = \infty$, tehát Lokális maximum értéke nincsen. $\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \dfrac{200}{x} = \infty$, így a globális minimum értéke $f(10) = 40$, megegyezik a lokális minimummal.

F3. (Szöveges szélsőérték feladat) Határozzuk meg az R sugarú körbe írható maximális területű téglalap területét!

Megoldás [F3]. Ha x és y jelöli a téglalap két oldalhosszát, akkor $T = x \cdot y$, és $4R^2 = x^2 + y^2$ tehát $T(x) = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$, $0 \le x \le R$ feltétel mellett.

$$T'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}(-2x) = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

x	$(2R, -\sqrt{2}R)$	$-\sqrt{2}R$	$(-\sqrt{2}R, 0)$	0	$(0, \sqrt{2}R)$	$\sqrt{2}R$	$(\sqrt{2}R, 2R)$	$2R$
$T'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$T(x)$	mon.csökk.	lok.min.	mon.nő	mon.nő (0)	mon.nő.	lok.max.($2R^2$)	mon.csökk.	(0)

Globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = y = \sqrt{2}R$ oldalhosszak mellett a terület maximális nagysága $2R^2$.

F4. (Szöveges szélsőérték feladat) Magyarországon a teljes lakosság 1 év alatt összesen 10^{13} forintnyi jövedelmet kap. Tudjuk, hogy ha a keresetek x%-át kellene jövedelemadóként befizetni, akkor a lakosság a befizetendő adó $\frac{x}{50}$-ed részét elcsalná (nem fizetné be). Ilyen feltételek mellett mekkorára kellene az adókulcsot állítani, hogy a lehető legtöbb pénz folyjon be?

Megoldás [F4]. $a(x) = 10^{13} \cdot \dfrac{x}{100} - 10^{13} \cdot \dfrac{x}{100}\dfrac{x}{50} = 10^{11}\left(x - \dfrac{x^2}{50}\right), \qquad 0 \le x \le 100$

$a'(x) = 10^{11}\left(1 - \dfrac{2x}{50}\right) = 10^{11}\left(\dfrac{50 - 2x}{50}\right), \quad a'(x) = 0 \leftrightarrow x = 25$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,25)$	25	$(25,100)$	100	$(100,\infty)$
$a'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$a(x)$	mon.nő	mon.nő(0)	mon.nő	lok.max.($12,5 \cdot 10^{11}$)	mon.csökk.	mon.csökk.(-10^{13})	mon.csökk.

Globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 25$.

F5. (hf) Andri mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha az előállításra x petákot költ, akkor darabját $6\sqrt{x}$ petákért tudja eladni. Mennyit költsön az előállításra, hogy a darabonkénti haszna maximális legyen?

Megoldás [F5]. $p(x) = 6\sqrt{x} - x, \quad x > 0, \quad p'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - 1 = \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \quad p'(x) = 0 \leftrightarrow x = 9$

x	0	$(0,9)$	9	$(9,\infty)$
$p'(x)$	n.é.	+	0	−
$p(x)$	(0)	mon.nő	lok.max.(9)	mon.csökk.

$\lim_{x\to\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} 6\sqrt{x} - x = \lim_{x\to\infty} x\left(\dfrac{6}{\sqrt{x}} - 1\right) = \infty \cdot (-1) = -\infty$. Így a globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 9$.

F6. (hf) Gabi mézeskalácsot árul az adventi vásárban. Ha x petákért adja darabját, akkor az előtte elsétálók $(60 - 3x)$ százaléka vesz tőle egyet. Mennyiért adja darabját, hogy a bevétele maximális legyen? (Feltehetjük, hogy 1000 vásárló halad el előtte, de ennek nincs jelentősége.)

Megoldás [F6]. $h(x) = 1000 \cdot \dfrac{60-3x}{100} \cdot x = 10(60x - 3x^2), \quad x > 0 \quad h'(x) = 10(60 - 6x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 10.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,10)$	10	$(10,\infty)$
$h'(x)$	+	+	+	0	−
$h(x)$	mon.nő.	mon.nő.(0)	mon.nő	lok.max.(3000)	mon.csökk.

A globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 10$.

F7. Egy futópályát építenek egy téglalap alakú focipálya körül úgy, hogy a focipálya két hosszabb oldala mentén egyenes, rövidebb oldala mentén félkörpályát alakítanak ki. A futópálya teljes hossza 400 méter lesz. Mekkora legyen a focipálya oldalainak hossza, hogy a területe maximális legyen?

Megoldás [F7]. $400 = 2y + 2\cdot\dfrac{x}{2}\pi, \quad T(x) = x\cdot y = x\cdot\dfrac{(400 - x\pi)}{2} = 200x - \dfrac{x^2\pi}{2}, \; 0 < x < 400/\pi$

$T'(x) = 200 - \pi x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \dfrac{200}{\pi}.$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,200/\pi)$	$200/\pi$	$(200/\pi,400/\pi)$	$400/\pi$	$(400/\pi,\infty)$
$T'(x)$	+	+	+	0	−	−	−
$T(x)$	mon.nő.	mon.nő.(0)	mon.nő	lok.max.$(2000/\pi)$	mon.csökk.	mon.csökk.(0)	mon.csökk.

A globális maximumhelye megegyezik a lokálissal $x = 200/\pi$. Ekkor $y = 100$, a focipálya területe pedig $2000/\pi$.