8. Gyakorlat
Konvexitás, Aszimptoták, L'Hospital-szabály.

F1. (Konvexitás) Adjuk meg azokat az intervallumokat, amelyeken az f függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$,

(b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-1}$,

(c) $f(x) = xe^{-5x}$ **(hf)**.

Megoldás [F1(a)]. $f''(x) = (6x^2 - 42x + 36)' = 12x - 42$

x	$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$	$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

Megoldás [F1(b)].

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{x-1}\right)'' = \left(\frac{3x^3 - 3x^2 - x^3}{(x-1)^2}\right)' = \left(\frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}\right)' = \left(\frac{(6x^2 - 6x)(x-1)^2 - (2x^3 - 3x^2)2(x-1)}{(x-1)^4}\right)' =$$

$$= \frac{(6x^2 - 6x)(x-1) - 2(2x^3 - 3x^2)}{(x-1)^3} = \frac{6x^3 - 12x^2 + 6x - 4x^3 + 6x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x}{(x-1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3}$$

A számláló 0-ban tűnik el, az $x^2 - 3x + 3$ kifejezés mindig pozitív. A nevező pozitív, ha $x \geq 1$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	n.é.	$+$
$f(x)$	konvex	infl.p.	konkáv	n.é.	konvex

Megoldás [F1(c)]. $f''(x) = (xe^{-5x})'' = (e^{-5x} + xe^{-5x} \cdot (-5))' = (e^{-5x}(1-5x))' =$

$= e^{-5x}(-5)(1-5x) + e^{-5x}(-5) = -5e^{-5x}(2-5x) = 5e^{-5x}(5x-2)$.

Mivel e^{-5x} mindenhol pozitív, tehát

x	$\left(-\infty, \frac{2}{5}\right)$	$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{2}{5}, \infty\right)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl.p.	konvex

F2. (Aszimptóták) Van-e az f függvénynek aszimptotája $+\infty$-ben, illetve $-\infty$-ben? Ha igen, akkor határozzuk meg:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2+9}{x}$,

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$,

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ **(hf)**,

(d) $f(x) = \sqrt{4x^2+3x+1}$,

(e) $f(x) = xe^{-5x}$ **(hf)**.

Megoldás [F2(a)].

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2+9}{x} &= \frac{9}{0+} = \infty \\ \lim_{x\to 0-} \frac{x^2+9}{x} &= \frac{9}{0-} = -\infty \end{aligned}\right\} \text{az } x=0 \text{ pólus, itt függőleges aszimptota lép fel } x=0 \text{ egyenlettel.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x^2} = 1 \text{ illetve } \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+9}{x^2} = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9}{x} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+9-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x} = 0$$

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = x$ egyeneshez tart. Hasonlóan a $-\infty$-ben is ugyanez az egyenes adódik.

Megoldás [F2(b)].

A függvény mindenhol folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - x^2 - 2x = \pm\infty \qquad \text{Nincsen vízszintes aszimptota.}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x} = \infty \qquad \text{Nincsen ferde aszimptota.}$$

Megoldás [F2(c)].

A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2+1} = \infty$ Nincsen vízszintes aszimptota.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = 1$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = x$ egyeneshez tart.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = -1$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} + x = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = -x$ egyeneshez tart.

Megoldás [F2(d)].

A függvény $\mathbb{R}$-en folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} = \infty$ Nincsen vízszintes aszimptota.

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x} = 2$

$\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2+3x+1} - 2x = \lim_{x \to \infty} \frac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}+2x} = \frac{3}{4}$

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = 2x + \frac{3}{4}$ egyeneshez tart.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+3x+1}}{x} = -2$

$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4x^2+3x+1} + 2x = \lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2+3x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+3x+1}-2x} = -\frac{3}{4}$

azaz a függvény a $\pm\infty$ felé az $y = -2x - \frac{3}{4}$ egyeneshez tart.

Megoldás [F2(e)].

A függvény mindenhol folytonos, nincsen függőleges aszimptota.

$\lim_{x \to \infty} xe^{-5x} = 0$ Vízszintes aszimptotája az x-tengely.

$\lim_{x \to -\infty} xe^{-5x} = \infty$ Nincsen további vízszintes aszimptota.

$\lim_{x \to -\infty} e^{-5x} = \infty$ Nincsen további ferde aszimptota.

F3. (L'Hospital-szabály) A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsuk ki az alábbi határértékeket. Azt is állapítsuk meg, hogy milyen típusú „kritikus" határértékről van szó.

$$(a)\ \lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)},$$

$$(b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{3x},$$

$$(c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x},$$

$$(d)\ \lim_{x\to 0} \left(\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{e^x-1}\right).$$

Megoldás [F3(a)]. $$\lim_{x\to 2} \frac{\sin(2x-4)}{\operatorname{tg}(x-2)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 2} 2\cos(2x-4)\cos^2(x-2) = 2.$$

Megoldás [F3(b)]. $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{3x} = \frac{"\infty"}{\infty} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3x} = 0.$$

Megoldás [F3(c)]. $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)-\cos^3(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)-\cos^3(x)} = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{-2\cos(x)\sin(x) + 3\cos^2(x)\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{-2+3\cos(x)} =$$

$$= \frac{2}{-2+3} = 2.$$

Megoldás [F3(d)]. $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = "\infty - \infty" = \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{xe^x - x}\right) = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{e^x + xe^x - 1}\right) = \frac{"0"}{0} \underset{\text{L'H}}{\rightsquigarrow} \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{2e^x + xe^x}\right) = \frac{1}{2}$$