Matemaika A1 előadás

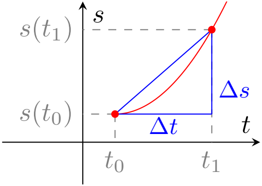
GTK NG,PSZ 2022. ősz

Balla-S.né Béla Szilvia
belus@math.bme.hu
geometria.math.bme.hu/bela-szilvia

9. elődás:
Differenciálszámítás,
Pontbeli derivált fogalma,
Differenciálási szabályok.

Differenciahányados

Motiváció a fizikából: mozgó pont sebessége.



$t \mapsto s(t)$: út-idő függvény

$v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ átlagsebesség a $[t_0, t_1]$-n

A pillanatnyi sebesség jobban jellemzi a mozgást: $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

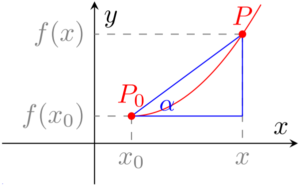
Az $f : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D_f \to \mathbb{R}$ függvény x_0-hoz tartozó **differenciahányados függvénye**

$$M_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ahol $0 < x < \delta$.

Ez a $\overline{PP_0}$ szelő meredeksége:

$M_{x_0}(x)(x - x_0) + f(x_0) = y, \quad \mathrm{tg}\alpha = M_{x_0}(x).$



Differenciálhányados

Definíció: Legyen az $f : D_f \to \mathbb{R}$ az x_0 környezetében értelmezett, ha létezik

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

az f függvény x_0 pontbeli differenciahányados függvényének határértéke, akkor ezt a határértéket f x_0-beli **differenciálhányadosának** (vagy **deriváltjának**) nevezzük.

Jelölése: $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ vagy $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}$

Geometriai jelentés: a szelők "határmeredeksége" - a görbéhez a legjobban simuló egyenes meredeksége $(x_0, f(x_0))$ pontban: **érintő.**

Ha az f függvénynek létezik a differenciálhányadosa az x_0 pontban, akkor az f függvény **differenciálható/deriválható/diffható** az x_0-ban.

Az f függvény differenciálható, ha az értelmezési tartományának minden pontjában differenciálható. Egy differenciálható f függvény **derivált függvénye**:

$$f' : x_0 \mapsto f'(x_0).$$

Egy példa

Legyen $f(x) = x^2$ függvény.
Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h} = 2x_0 + h.$$

A differenciálhányadosa:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0.$$

Így az f függvény derivált függvénye az $x_0 \mapsto 2x_0$ függvény.
Ezt így is írhatjuk:

$$\left(x^2\right)' = 2x.$$

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény.

Még egy példa

Legyen $f(x) = \sin x$ függvény. Differenciahányadosa az x_0 pontban:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h - \sin(x_0)}{h} =$$

$$= \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin h}{h}$$

A differenciálhányadosa:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0)(\cos h - 1) + \cos(x_0)\sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \sin(x_0)\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h} + \cos(x_0)\frac{\sin h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\sin(x_0)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} + \cos(x_0)\frac{\sin h}{h} =$$

$$= -\sin(x_0)\cdot 0 \cdot 1 + \cos(x_0)\cdot 1 = \cos(x_0).$$

Tehát $(\sin x)' = \cos x$.

Néhány derivált

$$(c)' = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(x)' = 1, \qquad (a \cdot x + b)' = a, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$(e^x)' = e^x, \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Műveleti tulajdonságok

Tétel: Ha az f és g függvények deriválhatóak egy x pontban, akkor

cf is deriválható ($c \in \mathbb{R}$), és $(cf)'(x) = cf'(x)$

$f + g$ is deriválható, és $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$f - g$ is deriválható, és $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

fg is deriválható, és $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\dfrac{f}{g}$ is deriválható ($g(x) \neq 0$), és $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

Példák:

Az x^3 deriváltja:

$$\left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$$

A tangens deriváltja:

$$(\mathrm{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$(x \sin x)'$

Feladatok

$$\left(x^3 + 3x^2 - 7x + 3\right)' = 3x^2 + 3 \cdot 2x - 7 \cdot 1 + 0 = 3x^2 + 6x - 7$$

$$(x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$(x\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)'$$

Feladatok

$$\left(x^3+3x^2-7x+3\right)' = 3x^2+3\cdot 2x-7\cdot 1+0 = 3x^2+6x-7$$

$$(x\sin x)' = x'\cdot\sin x + x\cdot(\sin x)' = 1\cdot\sin x + x\cdot\cos x = \sin x + x\cos x$$

$$\left(\frac{\cos x}{x^2}\right)' = \frac{(-\sin x)\cdot x^2-(\cos x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x\sin x-2\cos x}{x^3}$$