Algebra pót-ZH (2008/2009 tavasz)

1. ZH

1. Hány eleme van a 3 elemű test feletti 3×3-as invertálható mátrixok csoportjának? Add meg ennek a csoportnak egy nemtriviális normálosztóját.

2. Hány hatodrendű elem van $S_5 \times \mathbb{Z}_4$-ben?

3. Határozd meg $\mathbb{Z}_{20}$ összes faktorcsoportját.

4. Legyenek S és T félcsoportok, továbbá $\varphi : S \to T$ egy szürjektív homomorfizmus. Bizonyítsd be, hogy ha S csoport, akkor T is az.

5. Legyen $K, H \leq G$, $|G| = 72$, $|K| = 36$ és $|H| = 24$. Bizonyítsd be, hogy K-nak van 3 indexű részcsoportja.

6. Legyen G egy csoport és $x_1, \ldots, x_n \in G$ különböző elemek. Tegyük fel, hogy $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bármely két különböző részhalmaza különböző részcsoportot generál, vagyis ha $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ és $I \neq J$, akkor $\langle x_i : i \in I\rangle \neq \langle x_j : j \in J\rangle$. Bizonyítsd be, hogy $|G| \geq 2^n$.

2. ZH

1. Minden $g \in Q$-ra legyen $\varphi_g : Q \to Q$, $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. Igazold, hogy a $\{\varphi_g : g \in Q\}$ csoportot alkot a kompozícióval és izomorf $\mathbb{Z}_2^2$-vel.

2. Izomorfia erejéig hány 96-odrendű Abel-csoport van?

3. Legyen R véges, egységelemes (1) gyűrű. Bizonyítsd be, hogy egy $r \in R$ elemnek pontosan akkor van (multilikatív) inverze, ha létezik olyan $n > 0$ természetes szám, melyre $r^n = 1$.

4. Legyen P egy p-Sylow G-ben és $N \lhd G$. Bizonyítsd be, hogy $P \cap N$ egy p-Sylow N-ben és hogy NP/N egy p-Sylow G/N-ben.

5. Izomorfia erejéig add meg az összes 143 elemű csoportot.

6. Bizonyítsd be, hogy minden diédercsoport (D_n) homomorf képe a

$$D_\infty = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = 1\rangle$$

csoportnak.