ZH megoldások (2008/2009 tavasz)

I. ZH/1. Bizonyítsd be, hogy a 2×2-es invertálható valós felsőháromszög mátrixok $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$-ben részcsoportot, de nem normálosztót alkotnak.

Megoldás: Szorzásra zártság: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & dd' \end{pmatrix}$.

Inverzre zártság: Ha $ad \neq 0$, akkor $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$.

Nem normálosztó, mert nem zárt a tetszőleges elemmel való konjugálásra:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I. ZH/2. Legyen $H, K \leq G$, $|G| = 80$, $|H| = 20$ és $|K| = 8$. Bizonyítsd be, hogy $\langle H, K \rangle \lhd G$.

Megoldás: $|H|, |K| \mid |\langle H, K \rangle| \mid |G|$ miatt $|\langle H, K \rangle| = 40$ vagy 80, vagyis $\langle H, K \rangle$ 2 indexű részcsoportja G-nek, így normálosztó, vagy $\langle H, K \rangle = G \lhd G$.

I. ZH/3. Legyen $\mathbb{Z}_{33}^{\times}$ a 33-hoz relatív prím maradékosztályok multiplikatív csoportja modulo 33. Határozd meg a $\mathbb{Z}_{33}^{\times}/\langle 4 \rangle$ faltorcsoport rendjét és a 8-at tartalmazó mellékosztály rendjét ebben a csoportban. Ciklikus-e a faktorcsoport?

Megoldás: $|\mathbb{Z}_{33}^{\times}| = \varphi(33) = 20$ és $\langle 4 \rangle = \{1, 4, 16, 25, 31\}$, így $|\mathbb{Z}_{33}^{\times}/\langle 4 \rangle| = 4$.

$(8\langle 4 \rangle)^2 = 64\langle 4 \rangle = 31\langle 4 \rangle = \langle 4 \rangle$ tehát $o(8\langle 4 \rangle) = 2$ (nem 1, mert $8 \notin \langle 4 \rangle$).

A faktorcsoport nem ciklikus, mert a 7-et tartalmazó mellékosztály rendje $o(7\langle 4 \rangle) = 2$ és $7\langle 4 \rangle \neq 8\langle 4 \rangle$, vagyis a csoportban van minimum kettő másodrendű elem (de $\mathbb{Z}_4$-ben csak egy van).

I. ZH/4. Legyen $H = \{a, b, c\}$ és $S = \{f \in H^H : f(a) = a\}$ félcsoport a kompozícióval. Bizonyítsd be, hogy S-nek van *nulleleme*, azaz olyan z, amelyre $fz = zf = z$ minden $f \in S$-re. Hány olyan elem van S-ben, amelynek valahányadik hatványa z?

Megoldás: $z(x) = a$ minden $x \in H$-ra nyilvan jó, és könnyen latható, hogy csak ő jó. Egy $f \in S$ elemnek pontosan akkor hatvány z, ha $f(b) \neq b$, $f(c) \neq c$ és nem cseréli fel b-t és c-t. 3 ilyen elem van.

I. ZH/5. Legyen $S = \{a, a^2, a^3, a^4\}$ négyelemű félcsoport és tegyük fel, hogy $a^5 = a^2$. Határozd meg izomorfia erejéig S összes olyan homomorf képét, ami csoport.

Megoldás: Legyen $\varphi : S \to G$ egy szürjektív homomorfizmus a G csoportra. Ekkor $G = \langle \varphi(a) \rangle$ ciklikus csoport, továbbá $\varphi(a)^2 = \varphi(a^2) = \varphi(a^5) = \varphi(a)^5$, amiből $\varphi(a)^3 = 1$, tehát G a triviális csoport vagy $G \simeq \mathbb{Z}_3$. (Ezek a csoportok tényleg lehetnek is homomorf képei S-nek, mert $\varphi(a) = 1 \in \mathbb{Z}_3$ kiterjed homomorfizmussá).

I. ZH/6. Bizonyítsd be, hogy a komplex háromhatványadik egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra nézve. Mutasd meg, hogy ez a csoport nem ciklikus, de minden valódi részcsoportja véges ciklikus csoport.

Megoldás: Legyen $G = \{z \in \mathbb{C} : \exists\, n \in \mathbb{N}\ z^{3^n} = 1\}$.

Szorzásra zártság: $z^{3^n} = w^{3^k} = 1$ esetén, ha $n \geq k$, akkor $(zw)^{3^n} = z^{3^n}(w^{3^k})^{3^{n-k}} = 1$.

Inverzre zártság: Ha $z^{3^n} = 1$, akkor $(\frac{1}{z})^{3^n} = 1$.

G nyilván nem ciklikus, mert ha $z^{3^n} = 1$, akkor $|\langle z\rangle| \leq 3^n < |G| = \infty$.

Minden $n \in \mathbb{N}$-re csak véges sok olyan eleme van G-nek, melynek rangja 3^n (a primitív 3^n. egységgyökök). Ha $H \leq G$ végtelen részcsoport, akkor H-nak tartalmaznia kell tetszőlegesen nagy rendű elemeket, de egy elem hatványai kiadják az összes nála kisebb rendű elemet, vagyis csak $H = G$ lehetséges.

II. ZH/1. Legyen R egy tetszőleges gyűrű és $e \in R$ egy idempotens elem, vagyis $e^2 = e$. Bizonyítsd be, hogy $eRe = \{ere : r \in R\}$ egységelemes gyűrűt alkot R műveleteivel.

Megoldás: Összeadásra zártság: $ere + er'e = e(r + r')e \in eRe$.

Az összeadás kommutatív és asszociatív, mert R-ben az.

Null elem: $0 = e0e \in eRe$.

Ellentett: $ere + e(-r)e = e(r - r)e = 0$.

Szorzásra zártság: $ereer'e = e(ereer')e \in eRe$.

A szorzás asszociatív, mert R-ben az.

Egységelem: $e = eee \in eRe$ és $e(ere) = eere = ere$ (jobbról hasonlóan).

A disztributivitás is öröklődik R-ből.

II. ZH/2. Bizonyítsd be, hogy ha $N \lhd G$, $N \simeq \mathbb{Z}_2$ és G/N ciklikus, akkor G kommutatív. Plusz 3 pontért: Mutass példát arra, hogy $N \simeq \mathbb{Z}_3$ esetén már nem igaz a feladat állítása.

Megoldás:

Első megoldás: Legyen $N = \{1, a\}$. Minden $g \in G$-re $gN = \{g, ga\} = \{g, ag\} = Ng$, amiből $ga = ag$. Ha $G/N = \langle gN\rangle$, akkor G minden eleme g^n illetve $g^n a$ alakú, amik nyilván felcserélhetők.

Második megoldás: A gyakorlatról tudjuk, hogy ha $N \lhd G$ és $|N| = 2$, akkor $N \subseteq Z(G)$. Az Izomorfizmus Tétel szerint $G/Z(G) \simeq G/N\big/Z(G)/N$. Mivel G/N ciklikus, ezért a faktorcsoportjával izomorf $G/Z(G)$ is ciklikus. A gyakorlatról tudjuk, hogy ekkor G kommutatív.

Például $\mathbb{Z}_3 \simeq \{e, f, f^2\} \lhd D_3$, $D_3/\{e, f, f^2\} \simeq \mathbb{Z}_2$ ciklikus, de természetesen D_3 nem kommutatív ($f^2 t = tf \neq tf^2$).

II. ZH/3. Hány homomorfizmus megy $\mathbb{Z}_6$-ból $S_3 \times D_5$-be?

Megoldás: $\mathbb{Z}_6$ homomorf képei izomorfak $\mathbb{Z}_6$ faktoraival, vagyis a triviális csoporttal vagy $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, illtve $\mathbb{Z}_6$ valamelyikével attól függően, hogy $1 \in \mathbb{Z}_6$ képe 1, 2, 3 vagy 6-odrendű.

Vagyis az a kérdés, hogy hány darab olyan eleme van $S_3 \times D_5$-nek, aminek rendje $1, 2, 3$ vagy 6?

A legegyszerűebb megszámolni a nem ilyen rendű elemeket. $o((a, b)) = [o(a), o(b)]$ és $o(a) \mid |S_3| = 6$ vagyis csak az lehet a baj, ha $o(b) \nmid 6$. $o(e) = 1$, $o(t) = o(tf) = o(tf^2) = o(tf^3) = o(tf^4) = 2$, és $o(f) = o(f^2) = o(f^3) = o(f^4) = 5$. Tehát a megfelelő elek száma: $6 \cdot 10 - 6 \cdot 4 = 36$.

II. ZH/4. Add meg D_6 és $\mathbb{Z}_{100}$ egy kompozícióláncát és a hozzá tartozó faktorokat.

Megoldás: $D_6 \rhd \{e, f, f^2, f^3, f^4, f^5\} \rhd \{e, f^2, f^4\} \rhd \{e\}$ és a faktorok $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3$.

$\mathbb{Z}_{100} \rhd G_{50} \rhd G_{25} \rhd G_5 \rhd \{0\}$, ahol $G_{50} = \{2k : k = 0, 1, \ldots, 49\} \simeq \mathbb{Z}_{50}$, $G_{25} = \{4k : k = 0, 1, \ldots, 49\} \simeq \mathbb{Z}_{25}$, $G_5 = \{20k : k = 0, 1, \ldots, 49\} \simeq \mathbb{Z}_5$. A faktorok ciklikusak, így $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$ és $\mathbb{Z}_5$.

II. ZH/5. Add meg definiáló relációkkal $\mathbb{Z}_2^3$-t (és természetesen bizonyítsd is be, hogy amit megadsz, az tényleg izomorf $\mathbb{Z}_2^3$-vel:-)

Megoldás: Legyen $G = \langle a, b, c : ab = ba, bc = cb, ca = ac, a^2 = b^2 = c^2 = 1\rangle$. Ekkor G kommutatív, mert egymással felcserélhető elemek generálják. Mivel minden generátor másodrendű, ezért G elemi $a^{\varepsilon_1} b^{\varepsilon_2} c^{\varepsilon_3}$ alakúak, ahol $\varepsilon_i = 0$ vagy 1. Tehát G-nek legfeljebb 8 eleme van.

$\mathbb{Z}_2^3$ kielégiti az egyenleteket $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$ és $c(0, 0, 1)$ generátorok választásával, ezért $\mathbb{Z}_2^3$ homomorf képe G-nek, tehát csak izomorfak lehetnek.

II. ZH/6. Bizonyítsd be, hogy egy $5 \cdot 7 \cdot 17$ elemű csoportnak legalább két Sylow-részcsoportja normálosztó.

Megoldás: Jelölje G a csoportot.

$|\mathrm{Syl}_5(G)| = 5n + 1 \mid 7 \cdot 17$, tehát $|\mathrm{Syl}_5(G)| = 1$, az 5-Sylow normálosztó. Indirekt tegyük fel, hogy $|\mathrm{Syl}_7(G)| > 1$ és $|\mathrm{Syl}_{17}(G)| > 1$.

Tudjuk, hogy $|\mathrm{Syl}_7(G)| = 7k + 1 \mid 5 \cdot 17$, vagyis , ha nem 1, akkor 85 darab 7-Sylow van G-ben. Hasonlóan, ha nem 1, akkor 35 darab 17-Sylow van G-ban.

Mivel egy 7-Sylow metszete egy tőle különböző 7-Sylowval csak $\{e\}$ lehet és hasonlóan különböző 7- és 17-Sylowok metszete, továbbá különböző 17- és 17-Sylowok metszete is csak az egység lehet, ezért a nem 7 vagy 17 rendű elemek száma G-ben: $5 \cdot 7 \cdot 17 - 85 \cdot (7 - 1) - 35 \cdot (17 - 1) < 0$, ellentmondás, mert biztosan van 5-ödrendű elem a csoportban.

I. Pót-ZH/1. Hány eleme van a 3 elemű test feletti 3×3-as invertálható mátrixok csoportjának? Add meg ennek a csoportnak egy nemtriviális normálosztóját.

Megoldás: Egy ilyen mátrix első oszlopában a nullvektort kivéve minden lehet, vagyis $3^3 - 1 = 26$ vektor. A második oszlopban csak az elso oszlop 3 (különböző) számszorosa nem lehet, vagyis $3^3 - 3 = 24$ vektor. Az utolsó oszlopban az első két oszlop lineáris kombinációi nem állhatnak. Mivel az első két oszlop független, ezért 3^2 darab különböző lineáris kombinációjuk van. Tehát az utolsó oszlopban lehet $3^3 - 3^2 = 18$ darab vektor. Összesen $26 \cdot 24 \cdot 18$ mátrix.

Nemtriviális normálosztót alkotnak például azok a diagonális mátrixok, amelyek főátlójában végig ugyanaz az elem van. (Egy ilyen mátrix minden mátrixxal felcserélhető. Sőt pontosan ezek a mátrixok alkotják a centrumot.)

I. Pót-ZH/2. Hány hatodrendű elem van $S_5 \times \mathbb{Z}_4$-ben?

Megoldás: $(a, b) \in S_5 \times \mathbb{Z}_4$ pontosan akkor hatodrendű, ha $[o(a), o(b)] = 6$, vagyis a megfelelő rend-párok: $(1, 6)$, $(6, 1)$, $(2, 6)$, $(6, 2)$, $(3, 6)$, $(6, 3)$ $(6, 6)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$.

S_5 1-rendű elem az egység. Hasonlóan $\mathbb{Z}_4$-ben.

S_5 másodrendű elemei a tranzpozíciók és a két diszjunkt transzpozíció szorzataként előálló elemek, vagyis $\binom{5}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{2} = 40$ darab elem. $\mathbb{Z}_4$-ban egyetlen másodrendű elem van, a 2.

S_5 harmadrendű elemei a háromciklusok, vagyis $\binom{5}{3} = 10$ darab elem. $\mathbb{Z}_4$-ben nincsen harmadrendű elem.

S_5 hatodrendű elemei az egy tranzpozíció és egy tőle diszjunkt háromciklus szorzataként előálló elemek, vagyis $\binom{5}{2} = 10$ darab elem. $\mathbb{Z}_4$-ben nincsen hatoderndű elem.

Öszzesen $1\cdot 0+10\cdot 1+40\cdot 0+10\cdot 1+10\cdot 0+10\cdot 0+10\cdot 0+40\cdot 0+10\cdot 1 = 30$ másodrendű elem van $S_5 \times \mathbb{Z}_4$-ben.

I. Pót-ZH/3. Határozd meg $\mathbb{Z}_{20}$ összes faktorcsoportját.

Megoldás: 20 minden n osztójára van egyetlen n elemű részcsoportja $\mathbb{Z}_{20}$-nak, ami normálosztó, mert $\mathbb{Z}_{20}$ kommutatív. A faktorcsoportok ciklikusak, mert ciklikus csoport faktorai. Tehát a lehetséges faktorok: $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{10}$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2$ és a triviális csoport.

I. Pót-ZH/4. Legyenek S és T félcsoportok, továbbá $\varphi : S \to T$ egy szürjektív homomorfizmus. Bizonyítsd be, hogy ha S csoport, akkor T is az.

Megoldás: Egységelem: Ha e az S egységeleme, akkor $\varphi(e)$ lesz T egységeleme, mert $\varphi(e)\varphi(s) = \varphi(es) = \varphi(s)$ és hasonlóan fordítva is. (T minden eleme $\varphi(s)$ alakú.)

Inverz: $\varphi(s)$ inverze nyilván $\varphi(s^{-1})$ lesz, mert $\varphi(s)\varphi(s^{-1}) = \varphi(ss^{-1}) = \varphi(e)$ és fordítva is.

I. Pót-ZH/5. Legyen $K, H \leq G$, $|G| = 72$, $|K| = 36$ és $|H| = 24$. Bizonyítsd be, hogy K-nak van 3 indexű részcsoportja.

Megoldás: K normálosztó, mert 2 indexű részcsoport. Az Izomorfizmus Tétel szerinet ekkor $\langle K, H\rangle/K \simeq H/(K \cap H)$. Tudjuk, hogy $\langle K, H\rangle$ nem lehet K, mert $24 \nmid 36$, ezért csak G lehet. Tehát $|\langle K, H\rangle/K| = 2$, így $|H/(K \cap H)| = 2$, vagyis $|K \cap H| = 12$, vagyis $K \cap H$ egy 3 indexű részcsoport K-ban.

I. Pót-ZH/6. Legyen G egy csoport és $x_1, \ldots, x_n \in G$ különböző elemek. Tegyük fel, hogy $\{x_1, \ldots, x_n\}$ bármely két különböző részhalmaza különböző részcsoportot generál, vagyis ha $I, J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ és $I \neq J$, akkor $\langle x_i : i \in I\rangle \neq \langle x_j : j \in J\rangle$. Bizonyítsd be, hogy $|G| \geq 2^n$.

Megoldás: Első Megoldás: Belátjuk, hogy az $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ alakú elemek minden $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ esetén különbözők. (Igy kapunk 2^n elemet G-ben.)

Legyen $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ és $1 \leq j_1 < \cdots < j_\ell \leq n$ különböző részhalmazok. Indirekt tegyük fel, hogy $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} = x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_\ell}$. Feltehető, hogy a két sorozatban az első eltérés az első tagban van, továbbá, hogy $i_1 < j_1$. Ekkor azonban $x_{i_1} \in \langle x_{i_1+1}, \ldots, x_n\rangle$, ami ellentmondás.

Azt kell még meggondolni, hogy az üres szorzatot e-nek kell definiálnunk és hogy ha $k \geq 1$ és $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, akkor $e \neq x_{i_1}\ldots x_{i_k}$. Ez azért látszik, mert ha egyenlőség lenne, akkor $(x_{i_1}\ldots x_{i_{k-1}})^{-1} = x_{i_k}$, vagyis $x_{i_k} \in \langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}\rangle$ lenne, ami ellentmondás.

Második megoldás (Nikházy László): Tekintsük a következő részcsoportokat: $\{e\} = \langle\emptyset\rangle \subseteq \langle x_1\rangle \subseteq \langle x_1, x_2\rangle \subseteq \cdots \subseteq \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$. A feltevés szerint ezek mind különbözők, vagyis minden részcsoport legalább kettő indexű a következő részcsoportban. Ezek szerint $|\langle\emptyset\rangle| = 1$ miatt $|\langle x_1\rangle| \geq 2$, miatt $|\langle x_1, x_2\rangle| \geq 4$, és így tovább, végül $|G| \geq |\langle x_1, \ldots, x_n\rangle| \geq 2^n$.

II. Pót-ZH/1. Minden $g \in Q$-ra legyen $\varphi_g : Q \to Q$, $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$. Igazold, hogy a $\{\varphi_g : g \in Q\}$ csoportot alkot a kompozícióval és izomorf $\mathbb{Z}_2^2$-vel.

Megoldás: Legyen $\mathrm{Inn}(Q) = \{\varphi_g : g \in Q\}$. Ez valóban csoport a kompozícióval:

Műveletre való zártság: $\varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{gh}$.

Az asszociativítás triviálisa, mert függvények kompozíciójáról van szó.

Egységelem: φ_1 nyilván megfelel. (Könnyen látható továbbá, hogy $\varphi_{-1} = \varphi_1$.)

Inverz: $(\varphi_g)^{-1} = \varphi_{g^{-1}}$, mert $\varphi_{g^{-1}}(\varphi_g(x)) = \varphi_{g^{-1}}(gxg^{-1}) = g^{-1}gxg^{-1}g = x = \varphi_1(x)$, vagyis $\varphi_{g^{-1}}\varphi_g = \varphi_1$ minden g-re (és ezért fordítva is teljesül).

Az izomorfiához azt vegyük észre, hogy -1-el Q minden eleme felcserélhető, amiből $\varphi_g = \varphi_{-g}$ minden g-re. Könnyen ellenőrizhető, hogy $\varphi_1, \varphi_i, \varphi_j, \varphi_k$ különböző függvények. Például $\varphi_i(i) = iii^{-1} = (-1)(-i) = i$, de $\varphi_k(i) = ki(-k) = j(-k) = -i$. Tehát $\mathrm{Inn}(Q)$ egy négyelemű csoport. Mivel minden (nem egység) elem másodrendű (pl: $\varphi_i\varphi_i = \varphi_{i^2} = \varphi_{-1} = \varphi_1$) ezért csak $\mathbb{Z}_2^2$-vel lehet izomorf.

II. Pót-ZH/2. Izomorfia erejéig hány 96-odrendű Abel-csoport van?

Megoldás: A Véges Abel-csoportok Alaptétele szerint az a kérdés, hogy hányféleképpen bontható prímhatványok szorzatára $96 = 2^5 3$. Vagyis hányféleképpen áll elő 5 pozitív egészek összegeként? $1+1+1+1+1$, $1+1+1+2$, $1+2+2$, $1+1+3$, $1+4$, $2+3$, és 5, tehát izomorfia erejéig 6 darab 96 elemű Abel-csoport van.

II. Pót-ZH/3. Legyen R véges, egységelemes (1) gyűrű. Bizonyítsd be, hogy egy $r \in R$ elemnek pontosan akkor van (multilikatív) inverze, ha létezik olyan $n > 0$ természetes szám, melyre $r^n = 1$.

Megoldás: Tegyük fel, hogy $r^n = 1$. Ekkor $rr^{n-1} = r^{n-1}r = 1$, vagyis $r^{-1} = r^{n-1}$.

Fordítva, most tegyük fel, hogy létezik r^{-1}. Mivel R véges, ezért biztosan vannak $k > m > 0$, hogy $r^k = r^m$. Felhasználva az inverzet kapjuk, hogy $r^{k-m} = 1$.

II. Pót-ZH/4. Legyen P egy p-Sylow G-ben és $N \lhd G$. Bizonyítsd be, hogy $P \cap N$ egy p-Sylow N-ben és hogy NP/N egy p-Sylow G/N-ben.

Megoldás: Legyen $|G| = p^\alpha n$, $|N| = p^\beta m$, és $|N \cap P| = p^\gamma$ ahol $p \nmid n$ és $p \nmid m$.

Az Izomorfizmus Tétel szerint $\langle P, N\rangle/N \simeq P/(P \cap N)$. $|\langle P, N\rangle| = p^\alpha k$, $|\langle P, N\rangle/N| = p^{\alpha-\beta}k'$, és $|P/(P \cap N)| = p^{\alpha-\gamma}$, ahol $p \nmid k$ és $p \nmid k'$. Tehát $k' = 1$ és $\alpha - \gamma = \alpha - \beta$, így $\beta = \gamma$, amiből már következik, hogy $P \cap N$ p-Sylow részcsoportja N-nek.

Mivel $NP = \langle P, N\rangle$, ezért $|NP/N| = p^{\alpha-\beta}$ és $|G/N| = p^{\alpha-\beta}\frac{n}{m}$, ahol $p \nmid \frac{n}{m}$, ezért NP/N p-Sylow részcsoportja G/N-nek.

II. Pót-ZH/5. Izomorfia erejéig add meg az összes 143 elemű csoportot.

Megoldás: Legyen $|G| = 143 = 11 \cdot 13$. Ekkor $|\mathrm{Syl}_{11}(G)| = 11n + 1 \mid 13$ tehát egyetlen 11-Sylow van, így az normálosztó, jelölje ezt N. Hasonlóan egyetlen 13-Sylow van G-ben, ez is normálosztó, jelölje M.

Ekkor $N \cap M = \{e\}$, mert a metszet mindkettőnek részcsoportja, és természetesen $\langle N, M\rangle = G$, mert legalább $[11, 13] = 143$ eleme van a generált részcsoportnak. Ez azt jelenti, hogy $G \simeq N \times M$.

Tudjuk, hogy 11 rendű (prímrendű) csoport izomorfia erejéig csak $\mathbb{Z}_{11}$ van, hasonlóan 13 elemű is csak egy van. Tehát $G \simeq \mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{13} \simeq \mathbb{Z}_{143}$ (mert $(11, 13) = 1$), vagyis izomorfia erejéig egyetlen 143 elemű csoport van.

II. Pót-ZH/6. Bizonyítsd be, hogy minden diédercsoport (D_n) homomorf képe a

$$D_\infty = \langle x, y \mid x^2 = (xy)^2 = 1\rangle$$

csoportnak.

Megoldás: Csak azt kell észrevenni, hogy minden n-re $x = t$ és $y = f$ (generátorendszer!) választással az adott egyenlőségek igazak D_n-ben. Dyck Tétele szerint ekkor D_n homomorf képe D_∞-nek. (Egyszerűen $y^n = 1$-et hozzá kell venni a definiáló relációkhoz.)