1. Algebra ZH (2008/2009 tavasz)

1. Bizonyítsd be, hogy a 2×2-es invertálható valós felsőháromszög mátrixok $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$-ben részcsoportot, de nem normálosztót alkotnak.

2. Legyen $H, K \leq G$, $|G| = 80$, $|H| = 20$ és $|K| = 8$. Bizonyítsd be, hogy $\langle H, K \rangle \lhd G$.

3. Legyen $\mathbb{Z}_{33}^{\times}$ a 33-hoz relatív prím maradékosztályok multiplikatív csoportja modulo 33. Határozd meg a $\mathbb{Z}_{33}^{\times}/\langle 4 \rangle$ faltorcsoport rendjét és a 8-at tartalmazó mellékosztály rendjét ebben a csoportban. Ciklikus-e a faktorcsoport?

4. Legyen $H = \{a, b, c\}$ és $S = \{f \in H^H : f(a) = a\}$ félcsoport a kompozícióval. Bizonyítsd be, hogy S-nek van *nulleleme*, azaz olyan z, amelyre $fz = zf = z$ minden $f \in S$-re. Hány olyan elem van S-ben, amelynek valahányadik hatványa z?

5. Legyen $S = \{a, a^2, a^3, a^4\}$ négyelemű félcsoport és tegyük fel, hogy $a^5 = a^2$. Határozd meg izmorfia erejéig S összes olyan homomorf képét, ami csoport.

6. Bizonyítsd be, hogy a komplex háromhatványadik egységgyökök csoportot alkotnak a szorzásra nézve. Mutasd meg, hogy ez a csoport nem ciklikus, de minden valódi részcsoportja véges ciklikus csoport.