1. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Félcsoport, csoport, vagy egyik sem? Ha félcsoport, akkor van-e benne baloldali/jobboldali egységelem? Kommutativ-e a művelet?

(a) $(\mathbb{R}^{n\times m},+)$; $(\mathbb{R}^{n\times n},\cdot)$

(b) $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)=0\},+)$; $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)\neq 0\},+)$

(c) $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)=0\},\cdot)$; $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)\neq 0\},\cdot)$

(d) $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)=1\},+)$; $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)\neq 1\},+)$

(e) $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)=1\},\cdot)$; $(\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} : \det(A)\neq 1\},\cdot)$

(f) $(\mathbb{R}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ahol $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ a szokásos skalárszorzás

(g) $(\mathbb{R}^3,\times)$ ahol $\underline{a}\times\underline{b}$ a szokásos vektoriális szorzás

(h) $(\mathbb{R}[x],+)$; $(\mathbb{R}[x],\cdot)$ ahol $\mathbb{R}[x]$ a valós együtthatós polinomok halmaza

(i) $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+)$; $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\cdot)$ ahol $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a valós sorozatok halmaza

(j) $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \lim a_n\in\mathbb{R}\},+)$; $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \lim a_n\in\mathbb{R}\},\cdot)$

(k) $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim a_n=0\},+)$; $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim a_n=0\},\cdot)$

(l) $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim a_n=+\infty\},+)$; $(\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim a_n=+\infty\},\cdot)$

(m) $(S^1,\cdot)$ ahol $S^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ az egységkör a komplex síkon

(n) $(\mathcal{P}(A),\cup)$; $(\mathcal{P}(A),\cap)$; $(\mathcal{P}(A),\setminus)$

(o) $(\mathcal{P}(A),\triangle)$ ahol $\triangle$ a *szimmetrikus differencia:* $X\triangle Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$

(p) $(X^2,\odot)$ ahol $X\neq\emptyset$ és $(x,y)\odot(v,z)=(x,z)$

(q) $(X,\boxdot)$ ahol $X\neq\emptyset$ és $x\boxdot y=y$

(r) $(X^X,\circ)$ ahol X^X az $X\to X$ függvények halmaza, $\circ$ pedig a kompozíció

(s) $(S(X),\circ)$ ahol $S(X)$ az X halmaz permutációianak, vagyis az $X\to X$ bijekciók halmaza

(t) $(\mathbb{Z}_n,+)$; $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$

(u) $(\{a \in \mathbb{Z}_n : \exists\ a^{-1}\}, +)$; $(\{a \in \mathbb{Z}_n : \exists\ a^{-1}\}, \cdot)$

(v) $(\{a \in \mathbb{Z}_n : \nexists\ a^{-1}\}, +)$; $(\{a \in \mathbb{Z}_n : \nexists\ a^{-1}\}, \cdot)$

(w) $(\mathbb{Z}, \odot)$ ahol $n \odot m = n + m - nm$

(x) $(\mathcal{C}^n(D), +)$; $(\mathcal{C}^n(D), \cdot)$; $(\mathcal{C}^n(D), \circ)$ ahol $D \subseteq \mathbb{R}$ és $\mathcal{C}^n(D)$ az n-szer ($n = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$) folytonosan differenciálható $D \to \mathbb{R}$ függvények halmaza.

2. Legyen $(S, \cdot)$ egységelemes félcsoport.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in S$ invertálható, akkor ab és ba is invertálható.

(b) Bizonyítsd be, hogy ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.

3. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Mutass példát olyan félcsoportra, amiben pontosan n darab baloldali egységelem van.

4. Legyen $\varphi : (S_1, \odot_1) \to (S_2, \odot_2)$ egy homomorfizmus félcsoportok között. Bizonyítsd be, hogy $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi[S_1]$ részfélcsoportja S_2-nek.

5. Mutass példát olyan homomorfizmusra egységelemes félcsoportok között, ami az egységelemet nem egységelembe viszi. Előfordulhat-e ez csoportok között?

Beadható. Bizonyítsd be, hogy a két elem által generált szabad félcsoport tartalmaz egy a megszámlálható végtelen sok elem által generált szabad félcsoporttal izomorf részfélcsoportot.