10. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Legyen A Abel-csoport. Bizonyítsd be, hogy ha $\varphi : A \to A$ egy idempotens endomorfizmus, vagyis φ egy homomorfizmus, amelyre teljesül $\varphi^2 = \varphi$, akkor $A \simeq \mathrm{Ker}(\varphi) \times \mathrm{Im}(\varphi)$.

2. Legyenek G és H tetszőleges csoportok. Mutasd meg, hogy minden $(g,h) \in G \times H$ esetén $o((g,h)) = [o(g), o(h)]$.

Adott G csoportban az $a, b \in G$ elemek *kommutátora*: $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$; $H, K \leq G$ kommutátora: $[H,K] = \langle\{[h,k] : h \in H, k \in K\}\rangle$; G *kommutátor részcsoportja*: $G' = [G,G]$.

3. Bizonyítsd be a következőket:

(a) $[a,b] = e \iff ab = ba$.

(b) $H \leq G$ esetén $[H,G] \leq H \iff H \lhd G$.

(c) $G' \lhd G$ és G/G' Abel-csoport.

(d) Ha $\varphi : G_1 \to G_2$ homomorfizmus, akkor $\varphi_1[G_1'] \subseteq G_2'$.

(e) $H \leq G$ esetén $G' \leq H \iff H \lhd G$ és G/H Abel.

4. Bizonyítsd be, hogy $Z(S_n) = \{e\}$ és $S_n' = A_n$.

5. Bizonyítsd be, hogy

$$D_n \simeq \langle t, f \mid t^2 = e, f^n = e, tftf = e \rangle.$$