11. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Bizonyítsd be az alábbiakat:

(a) $Q \simeq \langle a, b \mid a^4 = 1, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

(b) $D_4 \simeq \langle a, b \mid a^2 = b^2, abab = baba \rangle$.

(c) $\{e\} \simeq \langle a, b \mid b^{-1}ab = a^2, a^{-1}ba = b^2 \rangle$.

2. Melyik ismert csoporttal izomorf S_4 2-Sylow részcsoportja?

Azt mondjuk, hogy a G *csoport hat* X*-en*, ha rögzített egy $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g * x$ függvény, melyre teljesül $(gh) * x = g * (h * x)$ minden $g, h \in G$ és $x \in X$ esetén, továbbá $e * x = x$ minden $x \in X$-re.

3. Hasson a G csoport X-en. Bizonyítsd be az alábbiakat:

(a) Minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén $g * x = y \iff g^{-1}y = g$.

(b) Ha $\varphi_g : X \to X$, $x \mapsto g * x$, akkor $\varphi : G \to S_X$, $g \mapsto \varphi_g$ egy csoporthomomorfizmus.

(c) Minden $x \in X$-re x *stabilizátora*: $H_x = \{g \in G : g * x = x\}$ részcsoportja G-nek.

(d) Ha $g * x = y$, akkor H_x és H_y egymás konjugáltjai.

(e) Egy $x \in X$ elem *orbitja*: $C(x) = \{y \in X : \exists\ g \in G\ y = g * x\}$. Bizonyítsd be, hogy $|C(x)| = |G : H_x|$.

4. Az előző feladat segítségével mutad meg, hogy ha p prím, $n = p^\alpha m$, $p \nmid m$, és $|G| = n$ egy csoport, akkor a G-beli p-Sylowok száma osztja m-et. (Ötlet: Legyen X a p-Sylowok halmaza. Ezen hasson G a konjugálással. Gondoljuk meg mit jelent ebben az esetben (e). Plussz kérdés: Mik most a stabilizátorok?)

5. Bizonyítsd be, hogy ha egy G egyszerű csoportban van egy n-indexű H részcsoport, akkor G beágyazható S_n-be. (Ötlet: Legyen $X = \{gH : g \in G\}$ és $g_1 * g_2H = g_1g_2H$. Ez egy csoporthatás. Vizsgáljuk meg ennek a hatásnak a *magját*: $\{g \in G : \forall\ x \in X\ g * x = x\}$-t.)

6. Bizonyítsd be, hogy minden 15 rendű csoport ciklikus.

7. Igazold, hogy nincsen 200, 204, és 56 rendű egyszerű csoport.

8. Igazold, hogy nincsen 120 és 616 rendű egyszerű csoport.

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}_6 \simeq \langle a, b \mid a^3 = b^4 = e, ba = ab^3 \rangle$.

Beadható 2. Bizonyítsd be, hogy

$$\{e\} \simeq \langle a, b, c \mid b^{-1}ab = a^2, c^{-1}bc = b^2, a^{-1}ca = c^2 \rangle.$$

Beadható 3. Bizoynítsd be, hogy nincsen 180 rendű egyszerű csoport.

Beadható 4. Legyenek p, q, r különböző prímek. Bizonyítsd be, hogy nincsen pqr rendű egyszerű csoport.

Beadható 5. Legyenek p és q különböző prímek. Bizonyítsd be, hogy nincsen p^2q rendű egyszerű csoport.