13. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Bizonyítsd be, hogy ha egy gyűrűben $x^2 = x$ minden x elemre, akkor a gyűrű kommutatív.

2. Bizonyítsd be, hogy ha R egységelemes gyűrű és $a \in R$ nilpotens, vagyis $a^n = 0$ valamely $n > 0$ természetes számra, akkor $1 + a$ invertálható.

3. Bizonyítsd be, hogy ha R egységelemes, $a, b \in R$ és $1+ab$-nek van inverze, akkor $1 + ba$-nak is van.

4. Bizonyítsd be, hogy egységelemes gyűrű invertálható elemei csoportot alkotnak a szorzással. Igaz-e, hogy ezek az elemek testet aloktnak a gyűrű műveleteivel?

5. Bizonyítsd be, hogy egy egységelemes nullosztómentes gyűrűben minden jobbinverz egyben balinverz is.

6. Mit mondhatunk az olyan R gyűrűkről, melyekben minden $a \in R$-re $\{0, a\}$ ideál R-ben?

7. Bizonyítsd be, hogy egy véges kommutatív R gyűrű pontosan akkor egységelemes, ha nincsen olyan nem nulla eleme, ami R minden elemét annullálná, azaz bármely elemmel megszorozva 0-t adna.

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy S_5-ben nem lehet egy harmad- és egy ötödrendű elem szorzata negyedrendű, de S_6-ban lehet.

Beadható 2. Bizonyítsd be, hogy egy 80 elemű csoport valamelyik Sylow-részcsoportja normálosztó.

Beadható 3. Hány elemű az $\langle x, y \mid x^5 = y^3 = 1, x^{-1}yx = y^2 \rangle$ csoport?