2. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Van-e olyan $(S, \cdot)$ félcsoport, melyben található $a, b, c \in S$ különböző elemek, hogy $ab = c$, $bc = a$, és $ca = b$ teljesül? Lehet-e $|S| = 3$?

2. Legyen $|X| = n \in \mathbb{N}$.

(a) Hány invertálható elem van $(X^X, \circ)$-ben?

(b) Hány olyan f eleme van X^X-nek, amire $f^2 = 1$? (1 a félcsoport egységeleme, vagyis id_X)

(c) Hány idempotens elem van $(X^X, \circ)$-ben?

3. Legyen H egy rögzített halmaz. Ekkor a H-n értelmezett kétváltozós relációk halmaza $\mathcal{P}(H^2)$. Adott $R, S \in \mathcal{P}(H^2)$ relációk esetén legyen

$$R \circ S = \big\{(a, b) \in H^2 : \exists\, x \in H\ \big((a, x) \in R \wedge (x, b) \in S\big)\big\}.$$

(a) Bizonyítsd be, hogy $(\mathcal{P}(H^2), \circ)$ egységelemes félcsoport.

(b) Határozd meg az $R = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (1, 6), (1, 1)\}$ és az $S = \{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\}$ relációk "szorzatát", $R \circ S$-et.

(c) Határozd meg a legyszűkebb R-et illetve S-et tartalmazó ekvivalenciarelációkat, $\overline{R}$-et és $\overline{S}$-et, ha $H = \{1, \ldots, 6\}$

(d) Ekvivalenciareláció-e $\overline{R} \circ \overline{S}$ a $\{1, \ldots, 6\}$ halmazon?

4. Legyen $(S, \cdot)$ egy félcsoport és $H = \{a \in S : a^2 = a\}$ az idempotens elemek halmaza.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha S kommutatív, akkor H részfélcsoportja S-nek. Mutass példát olyan S-re, aminek H nem részfélcsoportja.

(b) $a, b \in H$-esetén legyen $a \leq b \iff_{\text{def}} ab = ba = a$. Bizonyítsd be, hogy $(H, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz.

(c) Mutasd meg, hogy ha H-n a szorzás kommutatív, akkor minden $a, b \in H$-ra létezik $\inf\{a, b\} = ab$.

(d) ((c) megfordítása) Legyen $(P, \leq)$ egy parciálisan rendezett halmaz, melyben bármely két elemnek létezik infimuma. $p, q \in P$ esetén legyen $p * q = \inf\{p, q\}$. Mutasd meg, hogy $(P, *)$ egy kommutatív félcsoport.

5. Legyen $(S, \cdot)$ egy félcsoport és $e, f \in S$ idempotens elemek.

(a) Mutasd meg, hogy $eSe = \{exe : x \in S\}$ a legbővebb olyan részfélcsoportja S-nek, melyben e egységelem.

(b) Legyen $G_e = \{a \in eSe : \exists\, x \in S\ ax = xa = e\}$ az eSe-ben invertálható elemek halmaza. Mutasd meg, hogy G_e a legbővebb olyan részcsoportja S-nek, melyben e egységelem.

(c) Bizonyítsd be, hogy ha $e \neq f$, akkor $G_e \cap G_f = \emptyset$. (Következésképpen ha S-et lefedik a részcsoportjai, akkor lefedhető diszjunkt részcsoportjaival is.)

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy egy $(S, \cdot)$ félcsoport pontosan akkor uniója részcsoportjainak, ha $\forall\, a \in S\ \exists\, x \in S\ (axa = a \wedge ax = xa)$.

Beadható 2. Egy $(S, \cdot)$ félcsoportban egy $A \subseteq S$ *ideál*, ha $A \neq \emptyset$ és $AS, SA \subseteq A$. Bizonyítsd be, hogy két ideál metszete nem üres.