3. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

0. 1. feladtsor **5.**, 2. feladatsor **3.** (c), (d), **4.**

1. Legyen $\varphi : (S, \cdot) \to (T, \times)$ egy homomorfizmus félcsoportok között. Bizonyítsd be a következőket:

(a) $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi[S] \leq T$ részfélcsoport.

(b) Idempotens elem képe idempotens; idempotens elem őse részfélcsoport.

(c) Egységelem képe egységelem $\mathrm{Im}(\varphi)$-ben.

2. Bizonyítsd be, hogy egy véges csoport minden részfélcsoportja egyben részcsoportja is. Igaz-e ez végtelen csoportokra?

3. Egy $(G, \cdot)$ csoport *ciklikus*, ha egy elemmel generálható, vagyis van egy $a \in G$ hogy $G = \langle \{a\} \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Bizonyítsd be, hogy minden ciklikus csoport izomorf $\mathbb{Z}$-vel vagy $\mathbb{Z}_n$-el valamely $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$-re.

4. Legyen $(S, \cdot)$ félcsoport, $a \in S$ és $T = \langle \{a\} \rangle = \{a^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ az a által generált részfélcsoport. Izomorfia erejéig, hogy nézhet ki T?

Beadható. Keresd meg a $(\mathbb{Z}_6, \cdot)$ félcsoport összes kongruenciáját és add meg a hozzájuk tartozó faktorfélcsoportokat.