4. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Határozd meg a négyzet, a kocka, a (szabályos) tetraéder, és a kör szimmetria csoportját.

2. Bizonyítsd be, hogy ha egy csoportban minden elem inverze saját maga, akkor a csoport kommutatív.

3. Bizonyítsd be az elemek rendjére vonatkozó alábbi, nagyrészt számelméletben megismert állításokat:

(a) $g^n = e$ esetén $o(g)|n$,

(b) $g^{|G|} = e$,

(c) $o(g^{-1}) = o(g)$,

(d) $o(g^n) = \frac{o(g)}{(o(g),n)}$, ahol legyen $(\infty, n) = 1$.

Számelméletben melyik csoport rendjéről beszéltünk?

4. Igazold, hogy egy G csoport elemszáma pontosan akkor páros, ha tartalmaz másodrendű elemet. Továbbá, hogy minden nem triviális véges csoport tartalmaz prímrendű elemet.

5. A rend segítségével határozd meg egy ciklikus csoport összes részcsoportját.

6. Legyen A és B részcsoportjai a G csoportnak. Bizonyítsd be, hogy AB pontosan akkor részcsoportja G-nek, ha $AB = BA$.

7. Határozd meg az X által generált részcsoportokat az alábbi csoportokban:

(a) $(\mathbb{Z}, +)$-ban $X = \{28, 34\}$,

(b) $(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$-ban $X = \{2, 3\}$,

(c) D_5-ben $X = \{t, f^2\}$,

(d) D_6-ban $X = \{t, f^2\}$,

(e) S_4-ben $X = \{(123), (12)(34)\}$.

8. Legyen $k, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $k \leq n$. Bizonyítsd be, hogy $\{\pi \in S_n : \pi(k) = k\}$ maximális részcsoportja S_n-nek.

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy a $(\mathbb{Q}, +)$ nemhogy nem végesen generált, de még minimális generátorrendszere sincsen.

Beadható 2. Határozd meg az $X = \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(A) = 2\}$ által generált részcsoportot $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$-ben.

Beadható 3. Bizonyítsd be, hogy minden véges csoport izomorf egy véges egyszerű (hurok- és párhuzamos élet nem tartalmazó) irányitatlan gráf szimmetriacsoportjával.