5. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Melyek izomorfak a következő csoportok közül? $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_3^\times$, $\mathbb{Z}_5^\times$, $\mathbb{Z}_6^\times$, $\mathbb{Z}_8^\times$, $\mathbb{Z}_{12}^\times$, S_2, A_3, S_3, D_3, D_4, Q, $\mathrm{GL}(2,2)$.

2. Mi a Klein-csoport illetve D_3 Cayley reprezentációja?

3. Az alábbiak közül mely leképezések homomorfizmusok? Amelyek azok, azoknak mi a magja illetve a képe?

(a) $\mathbb{C}^+ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^+$, $\varphi(z) = |z|$.

(b) $\mathbb{C}^\times \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times$, $\varphi(z) = |z|$.

(c) $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^\times$, $\varphi(x) = e^x$.

(d) $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^\times$, $\varphi(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

(e) $\mathrm{GL}(n,T) \xrightarrow{\varphi} T^\times$, $\varphi(A) = \det(A)$.

(f) $S_n \xrightarrow{\varphi} (\{\pm 1\}, \cdot)$, $\varphi(\pi) = \mathrm{sgn}(\pi)$.

(g) $\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_n$, $\varphi(a) = a$ maradéka n-nel osztva.

(h) $\mathbb{Z}_{100} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_{100}$, $\varphi(x) = 60x$.

(i) $D_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_2$, $\varphi(x) = 0$, ah x forgatás, 1 ha x tükrözés.

(j) $(\mathbb{R}[x], +) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^+$, $\varphi(f) = f(i)$.

(k) $\mathbb{R}^+ \xrightarrow{\varphi} ([0,1), +_{\mathrm{mod}\ 1})$, $\varphi(x) = \{x\}$.

4. Bizonyítsd be, hogy minden 2 indexű részcsoport normálosztó.

5. Legyenek $A, B < G$ véges indexű részcoportok. Legfeljebb mennyi lehet $A \cap B$ indexe?

Beadható 1. Legyenek A és B a G csoport kommutatív részcsoportjai és tegyük fel, hogy $G = AB$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $A \cap B \lhd G$.

Beadható 2. Bizonyítsd be, hogy izomorfia rejeig egyetlen 10 elemű nem kommutatív csoport van D_5.

Beadható 3. Bizonyítsd be, hogy $n, m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ esetén $\mathbb{Z}^n$ pontosan akkor izomorf $\mathbb{Z}^m$-mel, ha $n = m$.