

6. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Melyik ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorcsoporthok?

- (a) $D_4/\{e, f^2\}$.
- (b) $S_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- (c) $D_8/\{e, f^2, f^4, f^6\}$.
- (d) $A_4/\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
- (e) $D_n/\{e, f, f^2, \dots, f^{n-1}\}$.
- (f) $\mathbb{Z}_{16}^\times/\{1, 9\}$.

2. Adjuk meg az következő csoportok összes normalosztóját: $D_3, D_4, D_5, Q, A_4, S_4, A_5, S_5, \text{GL}(2, 2)$.

3. Bizonyítsd be, hogy minden G csoport *centruma*

$$Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G \quad gx = xg\}$$

normálosztó G -ben.

4. Bizonyítsd be, hogy ha $N \triangleleft G$ és $|N| = 2$, akkor $N \leq Z(G)$.

5. Bizonyítsd be, hogy ha $G/Z(G)$ ciklikus, akkor G Abel.

6. Legyen G a $\text{GL}(3, p)$ csoport azon elemeinek halmaza, amiknek főátlója csupa 1-esből áll és főátlójuk alatt csak 0-k találhatóak. Bizonyítsd be, hogy $G \leq \text{GL}(3, p)$, $|G| = p^3$ és hogy G minden nem egység eleme p -edrendű.

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy ha G véges p -csoport, $H \leq G$ és $|G : H| = p$, akkor $H \triangleleft G$.

Beadható 2. Milyen n -ekre van S_n -ben Q -val izomorf részcsoport?

Beadható 3. Bizonyítsd be, hogy minden $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén $(\mathbb{R}^n, +) \simeq (\mathbb{R}^m, +)$.

Beadható 4. Igaz-e, hogy páratlan rendű csoportban minden három indexű részcsoport normálosztó?