

7. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Melyik ismert csoporttal izomorfak az alábbi faktorcsoporthok?

- (a) \mathbb{C}/\mathbb{R} .
- (b) \mathbb{C}^\times/S^1 , ahol $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- (c) $(\mathbb{R}^{n \times k}, +)/H$, ahol H egy előre rögzített l darab helyen 0 mátrixok csoportja.
- (d) \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

2. Az alábbiak közül melyik esetben normálosztó az adott részcsoporth?

- (a) D_n -ben $H = \{e, t\} (\simeq \mathbb{Z}_2)$.
- (b) D_{2n} -ben $H = \{e, f^n\} (\simeq \mathbb{Z}_2)$.
- (c) Q -ban $H = \{\pm 1, \pm i\} (\simeq \mathbb{Z}_4)$.
- (d) S_n -ben egy $k < n$ esetén $H = \{\pi \in S_n : \forall l \in [k+1, n] \pi(l) = l\} (\simeq S_k)$.
- (e) $GL(n, T)$ -ben $H = \{\lambda E_n : \lambda \in T \setminus \{0\}\} (\simeq T^\times)$.
- (f) $GL(n, T)$ -ben $H = \{A \in GL(n, T) : \det(A) > 0\}$.
- (g) $GL(n, T)$ -ben $H = \{A \in GL(n, T) : \det(A) = 1\}$.

3. Legyen $N \triangleleft G$, $H \leq G$, $|N| = 20$, $|H| > 20$ és $|G| = 100$. Bizonyítsd be, hogy H -nak van 5 indexű részcsoporthja.

4. Legyen G egy 91 elemű csoport. Hány elemű a

$$\{\varphi \in \text{End}(G) : \exists a, b \in G \setminus \{e\} (o(a) \neq o(b) \wedge \varphi(a) = \varphi(b) = e)\}$$

halmaz?

5. Add meg D_3 , D_4 , D_5 , Q , A_4 , S_4 és $\{A \in GL(2, 3) : A \text{ felsőháromszög}\}$ egy (ha tudod, akkor az összes) kompozícióláncát és a faktorokat.

6. Hány kompozíciólánca van \mathbb{Z}_n -nek $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ függvényében?

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy ha egy G véges csoportnak csak egyetlen maximális részcsoporthja van, akkor G ciklikus.

Beadható 2. Legyen $H \leq G$ és $N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$. Bizonyítsd be, hogy $N \leq H$, $N \triangleleft G$, és hogy minden $N' \triangleleft G$ -re, ha $N' \leq H$, akkor $N' \leq N$, vagyis, hogy N a legbővebb olyan normálosztója G -nek, ami része H -nak.

Beadható 3. Mutass példát olyan csoportra, melynek nincsen maximális részcsoportja.

Beadható 4. Bizonyítsd be, hogy minden végtelen csoportnak végtelen sok különböző részcsoportja van.