8. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Legyen $N \lhd G$ és $N \leq H \leq G$. Bizonyítsd be, hogy $H \lhd G$ pontosan akkor, ha $H/N \lhd G/N$.

2. Mutass példát olyan $N \lhd H \lhd G$ láncra, melyre N nem normálosztó G-ben.

3. Legyen G egy csoport. Igazold az alábbi állításokat:

(a) Minden $g \in G$-re a $\varphi_g : G \to G$, $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés G-nek automorfizmusa ($\varphi_g \in \mathrm{Aut}(G)$)

(b) $\mathrm{Inn}(G) = \{\varphi_g : g \in G\} \lhd \mathrm{Aut}(G)$.

(c) $\mathrm{Inn}(G) \simeq G/Z(G)$.

4. Egy G csoport $H \leq G$ részcsoportja *karakterisztikus részcsoport*, ha $\alpha[H] \subseteq H$ minden $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ esetén. Bizonyítsd be, hogy karakterisztikus részcsoport normálosztó.

5. "Itt hiányzik egy feladat."

6. Az következő csoportok közül melyek bonthatók fel két valódi részcsoportjuk direkt szorzatara: $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_{15}^\times$, $\mathbb{Z}_{16}^\times$, D_3, D_4, D_6, Q, A_4, S_5?

7. Bizonyítsd be, hogy $Z(G \times H) = Z(G) \times Z(H)$.

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^n) \simeq \mathrm{GL}(n, p)$.

Beadható 2. Bizonyítsd be, hogy ha egy csoportban egyetlen k-adrendű részcsoport van, akkor az normálosztó.

Adott A Abel-csoport és $X \subseteq A$ esetén azt mondjuk, hogy X *szabadon generálja A-t / A szabad Abel-csoport (X felett)*, ha minden B Abel-csoportra és $f : X \to B$ (tetszőleges) függvényre létezik egyértelműen egy $\varphi : A \to B$ homomorfizmus, hogy $\varphi \restriction X = f$.

Beadható 3. Bizonyítsd be, hogy $\mathbb{Z}$-t szabadon generálja $\{1\}$.

Beadható 4. Bizonyítsd be, hogy ha X szabadon generálja A-t és Y szabadon generálja B-t, továbbá $|X| = |Y|$, akkor $A \simeq B$. Másszóval izomorfia erejéig egy szabad Abel-csoport csak szabad generátorának számásságától függ.

Beadható 5. Adott I nemüres indexhalmaz esetén legyen

$$\mathbb{Z}^{(I)} = \{v : I \to \mathbb{Z} : |\{i \in I : v(i) \neq 0\}| < \infty\}$$

a koordinántánkénti összeadással szabad $\{v_i : i \in I\}$ felett, ahol $v_i(j) = 1$ ha $i = j$ különben 0. Vagyis minden számossághoz van olyan számásságú halmaz felett szabad Abel-csoport (és persze izomorfia erejéig egyértelemű is az előző feladat szerint).

Beadható 6. Bizonyítsd be, hogy a racionális számok additív csoportja előáll a következő alakban: $\mathbb{Q}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$, ahol $G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq \mathbb{Q}^+$ és minden n-re $G_n \simeq \mathbb{Z}$.