9. Algebra gyakorlat (2008/2009 tavasz)

1. Legyen G egy csoport és $X \subseteq G$. Mutasd meg, hogy $C_G(X) \lhd N_G(X)$.

2. Izomorfia erejéig hány $6, 8, 16, 32, 48$ rendű Abel-csoport van?

3. Legyen A egy Abel-csoport és $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ egy természetes szám. Legyenek továbbá $nA = \{na : a \in A\}$ és $A[n] = \{a \in A : na = 0_A\}$. Bizonyítsd be, hogy nA és $A[n]$ karakterisztikus részcsoportjai A-nak.

4. Legyen G egy véges csoport. Bizonyítsd be, hogy az $\alpha : G \to G$, $\alpha(g) = g^{-1}$ bijekció pontosan akkor automorfizmusa G-nek, ha G Abel.

5. Mutasd meg, hogy ha egy G véges csoportnak van másodrendű fixpontmentes automorfizmusa, vagyis egy $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, amire $\varphi^2 = \mathrm{id}_G$ és $\varphi(g) \neq g$ minden $g \in G\backslash\{e\}$-re, akkor G Abel. (Ötlet: Vizsgáljuk meg az $\varphi(g)g^{-1}$ alakú elemeket és alkalmazzuk az előző feladatot.)

Beadható 1. Bizonyítsd be, hogy a feloldható csoportok osztálya zárt a részcsoportképzésre, a faktorcsoport képzésre, és a véges sok tényezős direkt szorzat képzésre.

Egy P Abel-csoport *projektív*, ha minden B és C Abel-csoport, $\beta : B \to C$ szürjektív homomorfizmus, és $\varphi : P \to C$ tetszőleges homomorfizmus esetén létezik egy $\psi : P \to B$ homomorfizmus, melyre $\beta \circ \psi = \varphi$.

Beadható 2. Bizonyítsd be, hogy egy Abel-csoport pontosan akkor projektív, ha szabad.