Komplex függvénytan

Farkas Barnabás

Előszó

A jegyzet elsősorban a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem villamosmérnök hallgatóinak készült, harmadik féléves matematika tanulmányaik (A3) komplex fügvénytani fejezeteit tartalmazza egy kicsit kibővítve. A villamosmérnök hallgatókon kívül bármely más mérnöki vagy egyéb műszaki szakos hallgatóknak is segítséget nyújthat a témában.

A témához kapcsolódó feladatok közül a legfontosabb típusokból több kidolgozott példát is tartalmaz, ezzel igyekezvén segítséget nyújtani a ZH-kra illetve vizsgákra való felkészülésben.

Köszönettel tartozom Stubnya Gusztávné (Stubnya Etelka) tanárnőnek a jegyzet részletes átnézéséért. Az apróbb javítások és észrevételek mellett egy komolyabb matematikai hibára is rámutatott, mely teljesen elkerülte a figyelmemet.

Továbbá köszönetet szeretnék mondani Wettl Ferencnek a felmerülő, számomra megoldhatatlannak tűnő szerkesztési, formai problémák megoldásában nyújtott segítségéért és a LaTeX rejtelmeiben nyújtott útmutatásaiért.

Budapest, 2007 10. 23. Farkas Barnabás

Tartalomjegyzék

1. Alapok

Emlékeztető

A komplex számok struktúráját úgy kapjuk, hogy az $\mathbb{R}^2$ valós számpárok halmazán értelmezük a következő műveleteket:

- *összeadás*: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$,
- *szorzás*: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$.

Legyen $\underline{0} = (0, 0)$ és $\underline{1} = (1, 0)$. Belátható, hogy ezekkel a műveletekkel és ezzel a két kijelölt elemmel $\mathbb{R}^2$-en a valós számokéhoz nagyon hasonló struktúrát, egy *test*-et kapunk (lásd Appendix). Ezt nevezzük a *komplex számok testének*, jelölésben: $\mathbb{C}$. Vagyis ugyanarról a halmazról ($\mathbb{R}^2$) van szó, csak műveleteket asszociálunk hozzá. A $\pm$ használata nem okoz félreértést, mivel ugyanazt a műveletet jelöli $\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{C}$-ben.

Osztás: ha $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$, akkor

$$\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right).$$

Legyen $\underline{i} = (0, 1)$. Ekkor

$$\underline{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0) = -\underline{1}.$$

Az $\{\underline{1}, \underline{i}\}$ halmaz bázis $\mathbb{R}^2$-ben, ezért minden $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ egyértelműen felírható az

$$(a, b) = a\underline{1} + b\underline{i}$$

alakban. Ehelyett az egyszerűbb $a + bi$ jelölést fogjuk használni. Egyszerűsítésünkkel egy azonosítás is adódik: minden $a \in \mathbb{R}$-nek megfeleltettük $(a, 0)$-t, speciálisan 1-nek $\underline{1}$-et. Ezzel az egyszerűsítéssel formálisan minden $a \in \mathbb{R}$ valós számra $a = a + 0i = a\underline{1} + 0\underline{i} \in \mathbb{C}$ vagyis feltehetjük, hogy

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}.$$

Informálisan az "x tengely" pontjait mostantól valós számoknak tekintjük. Ennél valójában sokkal többről van szó: A $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ jelölések magukban foglalnak bizonyos műveleteket is. Könnyen belátható, hogy ha a most definiált műveleteket megszorítjuk $\mathbb{R}(\subseteq \mathbb{C})$-re, akkor a szokásos valós műveleteket kapjuk (lásd Appendix). Például ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor a megfeleltetést $\sim$-el jelölve:

$$ab \sim (ab, 0) = (ab - 00, a0 - b0) = (a, 0) \cdot (b, 0).$$

Egy $a + bi \in \mathbb{C}$ komplex szám *valós* és *képzetes* része:

$$\mathrm{Re}(a + bi) = a, \ \mathrm{Im}(a + bi) = b,$$

vagyis $a + bi = (\mathrm{Re}(a + bi), \mathrm{Im}(a + bi)) = \mathrm{Re}(a + bi) + \mathrm{Im}(a + bi)i$.

Hogyan számoljunk ebben az $a + bi$ alakban? Az imént definiált műveletek úgy viselkednek, mintha az $i^2 = -1$ szabály felhasználásával "értelemszerűen" számolnánk az $a + bi$ alakú "számokkal". Például

$$(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + a_1b_2i + b_1a_2i + b_1b_2i^2 =$$

$$a_1a_2 + (a_1b_2 + b_1a_2)i - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i,$$

vagyis ha az (a_1, b_1) és (a_2, b_2) pontokat felírjuk az $\underline{1}, \underline{i}$ bázisban a fenti egyszerűsítést alaklamazva és "értelemszerűen" összeszorozzuk őket, akkor az $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$ szorzat egyszerűsített felírását kapjuk az $\underline{1}, \underline{i}$ bázisban.

A továbbiakban nem említjük külön, hogy a komplex számtest alaphalmaza $\mathbb{R}^2$, így például egy $D \subseteq \mathbb{C}$ halmaz értelemszerűen egy $D \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz.

Bevezetünk még két függvényt:

- *konjugálás*: $\overline{a + bi} = a - bi (= a + (-b)i)$,
- *abszolút érték*: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Tudjuk, hogy ha $z, w \in \mathbb{C}$, akkor

$$\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w},$$

és ha $w \neq 0$, akkor

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}.$$

Továbbá, hogy

$$z\overline{z} = |z|^2, \quad |zw| = |z||w|,$$

és ha $w \neq 0$, akkor

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

Az $a + bi$ alakot a komplex szám *algebrai alakjának* nevezzük. Ebben az alakban minden alapművelet könnyedén elvégezhető. Problémát a hatványozás és a gyökvonás okoz.

Egy komplex szám *trigonometrikus alakja*:

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

amiből látszik, hogy $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + bi|$ és $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Vegyük észre, hogy a trigonometrikus alak nem egyértelmű φ választása miatt. Ha például kikötjük, hogy $\varphi \in [0, 2\pi)$ vagy $\varphi \in [-\pi, \pi)$, akkor már egyértelmű a trigonometrikus alak. Trigonometrikus alakban összeadni/kivonni nem igazán lehet. Szorozni/osztani, viszont annál könnyebben:

$$(r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)) \cdot (r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)) = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

és ha $r_2 \neq 0$, akkor

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Ennek következtében hatványozni is nagyon könnyű ebben az alakban: ha $n \in \mathbb{Z}$, akkor

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)).$$

Minden $z \neq 0$ komplex számnak n darad n. gyöke van ($n \in \mathbb{N}^+$). Trigonometrikus alakban:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}\Big),$$

ahol $k = 0, \ldots, n - 1$, vagy tetszőleges n darad egymást követő természetes szám.

$\mathbb{C}$ topológiája

A komplex számok halmazán a topológiai fogalmak ugyanazok, mint $\mathbb{R}^2$-ben (lásd Appendix). Pontosabban, ha a szokásos módon definiáljuk őket a komplex számokon értelmezett abszolút érték segítségével, akkor ugyanazt a fogalmat kapjuk, mint $\mathbb{R}^2$-ben, hiszen a komplex abszolút érték megegyezik az $\mathbb{R}^2$-beli normával ($\|\cdot\|$).

Például egy $U \subseteq \mathbb{C}$ halmaz nyílt, ha

$$\forall\, u \in U\ \exists\, \epsilon > 0\ \forall\, z \in \mathbb{C}\ (|z-u| < \epsilon \Rightarrow z \in U).$$

Szükségünk lesz egy-két új topológiai fogalomra, ezeket $\mathbb{R}^2$-ben definiáljuk.

1.1 Definíció. *Egy $X \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz* összefüggő, *ha nincsenek $U, V \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt halmazok, amikre:*

- $X \subseteq U \cup V$,
- $X \cap U \neq \emptyset$ *és* $X \cap V \neq \emptyset$,
- $X \cap U \cap V = \emptyset$.

X útösszefüggő, *ha bármely két pontja összeköthető X-en belül haladó folytonos görbével, vagyis minden $a, b \in X$-hez létezik $f : [0,1] \to X$ folytonos függvény, hogy $f(0) = a$ és $f(1) = b$.*

X poligonösszefüggő, *ha bármely két pontja összeköthető X-en belül haladó töröttvonallal, vagyis minden $a, b \in X$-hez létezik $f : [0,1] \to X$ folytonos függvény, hogy $f(0) = a$, $f(1) = b$ és f véges sok pont kivételével differenciálható és két ilyen pont között a deriváltja állandó.*

Világos, hogy a poligonösszefüggőségből következik az útösszefüggőség, viszszafelé pedig nem (pl.: körvonal). Ha $X \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, akkor az összefüggőség definíciója leegyszerűsődik: X pontosan akkor összefüggő, ha nem áll elő két nemüres diszjunkt nyílt halmaz uniójaként.

1.2 Feladat*. Bizonyítsa be, hogy az útösszefüggőségből következik az összefüggőség.

Visszafelé nem igaz, például belátható, hogy a

$$\{(0,0)\} \cup \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) : x \in (0,1) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

halmaz összefüggő, de nem útösszefüggő.

1.3 Megjegyzés. Az összefüggőség definíciójában a harmadik pont helyett elég feltenni, hogy $U \cap V = \emptyset$, vagyis, hogy az így kapott, első ránézésre gyengébb (Miért is?) fogalom ekvivalens az összefüggőséggel.

1.4 Definíció. *Egy nemüres $D \subseteq \mathbb{R}^2$ halmaz* tartomány, *ha nyílt és összefüggő.*

Nyílt halmazok esetében az összefüggőség különböző verziói ekvivalensek:

1.5 Tétel. *Egy $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nemüres nyílt halmazra a következők ekvivalensek:*

- *D összefüggő, vagyis tartomány,*

- *D útösszefüggő,*
- *D poligonösszefüggő.*

1.6 Definíció. *Egy $X \subseteq \mathbb{R}^2$ tartomány* egyszeresen összefüggő (1-összefüggő), *ha minden X -beli $\gamma : [0,1] \to X$ folytonos zárt ($\gamma(0) = \gamma(1)$) görbe folytonosan pontrahúzható X-en belül, vagyis létezik egy $p \in X$ és egy $H : [0,1]^2 \to X$ folytonos függvény, hogy minden $t \in [0,1]$-re $f(t,1) = \gamma(t)$ és $f(t,0) = p$.*

1.7 Feladat*. Bizonyítsa be, hogy minden konvex halmaz 1-összefüggő.

Mivel egy tartomány útösszefüggő, ezért könnyen meggondolható, hogy az 1-összefüggőség definíciójában a p pont tetszőlegesen választható, vagyis ha X 1-összefüggő, akkor minden $p \in X$-hez létezik egy megfelelő H.

Belátható, hogy egy $X \subseteq \mathbb{R}^2$ pontosan akkor 1-összefüggő, ha X folytonosan pontra húzható X-en belül, vagyis ha egy (tetszőleges) $p \in X$-re létezik $H : X \times [0,1] \to X$ folytonos függvény, hogy minden $x \in X$-re $f(x,1) = x$ és $f(x,0) = p$.

Sorozatok és sorok $\mathbb{C}$-ben

Egy komplex sorozat határértékét definiáljuk a szokásos, $\mathbb{R}^2$-beli módon vagyis (komplex jelölésekkel): $z_n \to z$ vagy $\lim z_n = z$ pontosan akkor, ha

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ |z_n - z| < \epsilon.$$

Egy komplex sorozat *konvergens*, ha létezik (komplex) határértéke, különben *divergens*.

Ismét megjegyezzük, hogy a komplex abszolút érték megegyezik az $\mathbb{R}^2$-beli normával, ezért ez a definíció tényleg a szokásos $\mathbb{R}^2$-beli konvergenciát adja: ha $z_n = a_n + b_n i$ és $z = a + bi$, akkor

$$z_n \to z \iff (a_n, b_n) \to (a, b).$$

Korábbi tanulmányainkból már tudjuk, hogy $(a_n, b_n) \to (a, b)$ pontosan akkor, ha $a_n \to a$ és $b_n \to b$. Más szóval komplex sorozatok határértékének meghatározásához csak a klasszikus (valós) sorozatoknál megismert technikákat kell alkalmazni.

A síkbeli sorozatoktól eltérően most beszélni fogunk ∞ határértékről is.

1.8 Definíció. *Egy z_n komplex sorozat* végtelenhez tart, *jelölésben* $\lim z_n = \infty$ *vagy $z_n \to \infty$, ha $|z_n| \to \infty$, vagyis*

$$\forall\ K \in \mathbb{R}\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0\ |z_n| \geq K.$$

Komplex sorozatokra minden $\mathbb{R}^2$-ben megismert tétel értelemszerűen lefordítható. Például:

1.9 Tétel. *Ha z_n egy korlátos (komplex) sorozat, vagyis létezik egy K, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $|z_n| < K$, akkor van konvergens részsorozata.*

1.10 Tétel. (Cauchy Kritérium) *Egy z_n sorozat pontosan akkor konvergens, ha* Cauchy-sorozat *vagyis*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ k, m \geq n_0\ |z_k - z_m| < \epsilon.$$

Ami kevésbe triviális, hogy a műveleteket is megtartják a komplex sorozatok limeszei. A problémát az okozhatná, hogy új műveleteket definiáltunk $\mathbb{R}^2$-en (szorzás és osztás). Azonban az eredeti, valós sorozatokra vonatkozó bizonyítás lemásolható.

1.11 Állítás. *Ha $z_n \to z$ és $w_n \to w$ $(z, w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})$, akkor*

$$(z_n \pm w_n) \to z \pm w \text{ és } z_n w_n \to zw,$$

ha ez értelmes, vagyis nem $\infty \pm \infty$ illetve $\infty \cdot 0$ vagy $0 \cdot \infty$ alakú, továbbá ha $w \neq 0$, akkor

$$\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w},$$

ha nem $\frac{\infty}{\infty}$ alakú.

Vegyük észre, hogy a $\infty + \infty$ most nem értelmezhető! Például komplexben $n \to \infty$ és $-n \to \infty$, de $n - n = 0 \to 0$; $n^2 \to \infty$ és $-n \to \infty$, de $n^2 - n \to \infty$.

Lássunk egy-két példát:

1.) $\lim \frac{n^2+ni}{i} = \infty$, mert $\left|\frac{n^2+ni}{i}\right| = \frac{|\sqrt{n^4+n^2}|}{1} \to +\infty$.

2.) $\lim i^n$ nem létezik, mert az i^n sorozat elemei $1, i, -1, -i, 1, \ldots$. Vagy másképpen i^n nem Cauchy-sorozat, mert például $\epsilon = 1$-hez nincsen küszöbindex.

3.) $\lim \frac{n+i}{1+ni} = \lim \frac{1+\frac{i}{n}}{\frac{1}{n}+i} = \frac{1}{i} = -i$.

1.12 Feladat. $\lim \frac{1+ni}{n^2+i} = ?$

1.13 Feladat. $\lim \left(\frac{\sqrt{3}+5ni}{n+i}\right)^n = ?$

1.14 Feladat. $\lim \frac{i^n+n^2-i}{n^2-n^2 i} = ?$

1.15 Feladat. $\lim \left(\frac{\sqrt{3}+5i}{n+i}\right)^n = ?$

1.16 Feladat. $\lim \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^n = ?$

$\mathbb{C}$-beli sorok összegét ugyanúgy értelmezzük, mint a valós esetben, visszavezetjük sorozatok határértékére.

1.17 Definíció. *Ha z_n egy sorozat és $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = w$ pontosan akkor, ha $\lim(z_0 + \ldots z_n) = w$.*

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ sor konvergens, ha a definíciójában szereplő sorozat konvergens, különben divergens. A sorokra vonatkozó valósból megismert, rendezést (pl.: pozitív tagú sorok vagy majoráns/minoráns kritérium) nem tartalmazó tételek itt is triviálisan igazak. Például:

1.18 Tétel. *Ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n = z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} w_n = w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, akkor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (z_n \pm w_n) = z \pm w$, ha nem $\infty \pm \infty$ alakú.*

1.19 Tétel. (Cauchy Kritérium) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *pontosan akkor konvergens, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $k > m \geq n_0$ esetén* $\left|\sum_{n=m+1}^{k} z_n\right| < \epsilon$.

Bizonyítás. Jelölje $s_n = z_0 + \cdots + z_n$ a sor n. szeletét. A $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sor pontosan akkor konvergens és összege z, ha $s_n \to z$. Ez a 1.10 Tétel szerint pontosan akkor teljesül, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik n_0, hogy minden $k, m \geq n_0$-ra $|s_k - s_m| < \epsilon$. Világos, hogy ha $k > m$, akkor $s_k - s_m = \sum_{n=m+1}^{k} z_n$. $\square$

1.20 Tétel. *Ha a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sor abszolút konvergens (vagyis a $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ sor konvergens), akkor konvergens.*

Bizonyítás. Belátjuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ sor kielégíti a 1.19 Tétel feltételét. Legyen $\epsilon > 0$ fix. Mivel a $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ sor konvergens, ezért a 1.19 Tétel szerint létezik n_0, hogy minden $k > m \geq n_0$-ra $\left|\sum_{n=m+1}^{k} |z_n|\right| < \epsilon$. Ha $k > m \geq n_0$, akkor $\left|\sum_{n=m+1}^{k} z_n\right| \leq \sum_{n=m+1}^{k} |z_n| = \left|\sum_{n=m+1}^{k} |z_n|\right| < \epsilon$. $\square$

Egy példa: Ha $|z| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

mert a sor n. szelete, $z^0 + z^1 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ és $z^{n+1} \to 0$, hiszen $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$.

1.21 Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha z nem negatív egész szám, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+n)(z+n+1)} = \frac{1}{z}.$$

Komplex függvények határértéke és folytonossága

Egy $D \subseteq \mathbb{C}$ halmazon értelmezett $f : D \to \mathbb{C}$ függvény adott pontban vett határértékét illetve folytonosságát értelmezzük a szokásos, $\mathbb{R}^2$-beli módon.

1.22 Definíció. *Ha $f : D \to \mathbb{C}$ és $z_0 \in D'$ torlódási pont, akkor $\lim_{z_0} f = w \in \mathbb{C}$ pontosan akkor, ha*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in D\ (0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon),$$

és ha $z_0 \in D$, akkor f folytonos z_0-ban, *ha*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in D\ (|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon).$$

Ez tényleg a szokásos $\mathbb{R}^2$-beli határérték illetve folytonosság definíciója, hiszen a komplex abszolút érték megegyezik az $\mathbb{R}^2$-beli normával, így mint a sorozatok esetében, komplex függvények határértékének kiszámításában is a többváltozós analízisben megismert módszerek alkalmazhatók.

Egy $f : D \to \mathbb{C}$ függvény persze $f : D \to \mathbb{R}^2$ függvény. Ekkor f koordinátafüggvényeit jelüljük u, v-vel, vagyis $u, v : D \to \mathbb{R}$ és minden $(x, y) \in D$-re $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, vagy rövidebben $f = (u, v)$. Világos, hogy ha f-et komplex függvénynek tekintjük, akkor az

$$f = u + iv$$

jelölést alkalmazzuk.

Alkalmazva a többváltozós analízisből jólismert tételeket: ha $z_0 \in D'$, akkor

$$\exists \lim_{z_0} f \iff (\exists \lim_{z_0} u \wedge \exists \lim_{z_0} v),$$

és ekkor (komplex jelölésekkel)

$$\lim_{z_0} f = \lim_{z_0} u + i \lim_{z_0} v.$$

Továbbá, ha $z_0 \in D$, akkor f pontosan akkor folytonos z_0-ban, ha u és v is folytonos z_0-ban.

Mivel egy tartománynak minden pontja torlódási pontja, ezért ha $D \subseteq \mathbb{C}$ egy tartomány és $f : D \to \mathbb{C}$, akkor f pontosan akkor folytonos egy $z_0 \in D$ pontban, ha

$$\lim_{z_0} f = f(z_0).$$

Mint a sorozatoknál, most is külön meg kell említenünk, hogy értelmezzük a $\lim_{z_0} f = \infty$, a $\lim_{\infty} f = w \in \mathbb{C}$ és a $\lim_{\infty} f = \infty$ fogalmakat is.

1.23 Definíció. *Legyen $D \subseteq \mathbb{C}$ és $f : D \to \mathbb{C}$. Ekkor*

- *ha $z_0 \in D'$, akkor $\lim_{z_0} f = \infty$ pontosan akkor, ha $\lim_{z_0} |f| = +\infty$ (valós értelemben), vagyis*

$$\forall\, K \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, z \in D\ (0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > K);$$

- *ha $\infty \in D'$, vagyis D nem korlátos és $w \in \mathbb{C}$, akkor $\lim_{\infty} f = w$ pontosan akkor, ha*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, K \in \mathbb{R}\ \forall\, z \in D\ (|z| > K \Rightarrow |f(z) - w| < \epsilon);$$

- *ha $\infty \in D'$, akkor $\lim_{\infty} f = \infty$ pontosan akkor, ha*

$$\forall\, K_1 \in \mathbb{R}\ \exists\, K_2 \in \mathbb{R}\ \forall\, z \in D\ (|z| > K_2 \Rightarrow |f(z)| > K_1).$$

Természetesen az Átviteli Elv is igaz marad komplex esetben. (Vegyük észre, hogy ez csak a ∞-t tartalmazó esetekben újdonság, egyébként csak az $\mathbb{R}^2$-beli Átviteli Elv lefordítása komplex jelölésekkel.)

1.24 Tétel. (Átviteli Elv) *Legyen* $D \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ *és* $z_0 \in D'$. *Ekkor* $\lim\limits_{z_0} f = w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *pontosan akkor, ha minden* $z_n \in D \backslash \{z_0\}$ *sorozatra, ha* $z_n \to z_0$, *akkor* $f(z_n) \to w$.

Most is igazak maradnak a valósból megismert műveletartást állító tételek, az 1.11 Állítás függvényekre vonatkozó változata a következő:

1.25 Állítás. *Ha* $f, g : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D'$, $\lim\limits_{z_0} f = w_1$ *és* $\lim\limits_{z_0} g = w_2$, *akkor*

$$\lim_{z_0} f \pm g = w_1 \pm w_2 \text{ és } \lim_{z_0} fg = w_1 w_2,$$

ha ezek értelmesek, továbbá ha $w_2 \neq 0$, *akkor*

$$\lim_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{w_1}{w_2},$$

ha értelmes.

Egy-két példa:

1.) $\lim\limits_{0} \frac{|z|}{z^2} = \infty$, mert $\left|\frac{|z|}{z^2}\right| = \frac{|z|}{|z^2|} = \frac{|z|}{|z|^2} = \frac{1}{|z|} \to \infty$, ha $z \to 0$.

2.) $\lim\limits_{-i} \frac{z+i}{z^2+1} = \lim\limits_{-i} \frac{z+i}{(z+i)(z-i)} = \lim\limits_{-i} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$.

3.) $\lim\limits_{\infty} \frac{iz+i}{3-z^2} = \lim\limits_{\infty} \frac{i+\frac{i}{z}}{\frac{3}{z}-z} = \frac{i}{\infty} = 0$.

4.) $\lim\limits_{0} \frac{\overline{z}}{z}$ nem létezik, mert $\lim\limits_{0} \frac{\overline{(\frac{1}{n})}}{\frac{1}{n}} = 1$, de $\lim\limits_{0} \frac{\overline{(\frac{i}{n})}}{\frac{i}{n}} = -1$ és alkalmazzuk az Átviteli Elvet.

1.26 Feladat. $\lim\limits_{0} \frac{|z|}{z} = ?$, $\lim\limits_{0} \frac{|z^2|}{z} = ?$

1.27 Feladat. $\lim\limits_{i} \frac{z^2+1}{z^6+1} = ?$

1.28 Feladat. $\lim\limits_{\infty} \frac{z^3+z+1}{z^2-1} = ?$

1.29 Feladat. Legyen f mindenhol folytonos és $f(z) = \frac{z\,\mathrm{Re}(z)}{|z|}$, ha $z \neq 0$. Határozza meg $f(0)$-t.

Említés szinten kitérünk a komplex függvénysorokra. Adott D tartományon értelmezett $f_n : D \to \mathbb{C}$ függvények esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor

- konvergens D-n, ha minden $z \in D$-re a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ sor konvergens,
- egyenletesen konvergens D-n, ha konvergens, összegfüggvénye f és minden $\epsilon > 0$-hoz létezik N, hogy minden $m \geq N$-re és $z \in D$-re

$$\left|\sum_{n=0}^{m-1} f_n(z) - f(z)\right| = \left|\sum_{n=m}^{\infty} f_n(z)\right| < \epsilon.$$

Akárcsak a valós esetben, komplexben is igaz, hogy folytonos függvények egyenletesen konvergens sorának összegfüggvénye folytonos. Továbbá a Weierstrass Kritérium is igaz, vagyis ha $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ egy függvénysor, minden n-re $|f_n| \leq a_n$ és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ sor konvergens, akkor a függvénysor egyenletesen konvergens.

2. Differenciálhatóság

Komplex differenciálhatóság

Az alapfelállás:

$$D \subseteq \mathbb{C} \textbf{ egy tartomány és } f : D \to \mathbb{C} \textbf{ egy függvény}.$$

Ezt a továbbiakban nem kötjük ki külön, mindig feltesszük.

2.1 Definíció. *Az f függvény* differenciálható *a $z_0 \in D$ pontban, ha létezik a*

$$\lim_{z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$$

határérték. Ekkor ezt $f'(z_0)$-al jelöljük.

A D minden pontjában differenciálható függvényeket D-n reguláris *vagy* holomorf függvényeknek *nevezzük, halmazukat $\mathcal{O}(D)$-vel jelöljük.*

A $\mathbb{C}$ minden pontjában differenciálható függvényeket, vagyis $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ elemeit egészfüggvényeknek *nevezzük.*

Például, ha $n \in \mathbb{N}$, akkor az $f(z) = z^n$ függvény differenciálható minden pontban és $f'(z) = nz^{n-1}$. Ennek bizonyítása a valós eset szó szerinti átírása: Az $n = 0$ eset triviális. Ha $n > 0$, akkor

$$f'(z_0) = \lim_{z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z_0} (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \cdots + z z_0^{n-2} + z_0^{n-1}) = n z_0^{n-1}.$$

2.2 Állítás. *Ha f differenciálható z_0-ban, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás. Mivel $f(z) = f(z_0) + (f(z) - f(z_0)) = f(z_0) + \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z - z_0)$, ezért

$$\lim_{z_0} f = f(z_0) + \lim_{z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0) =$$

$$f(z_0) + \lim_{z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z_0}(z - z_0) = f(z_0) + f'(z_0)0 = f(z_0).$$

□

A következő tételt mutatja, hogy a differenciálási szabályok ugyanazok, mint az egyváltozós valós esetben. A tétel bizonyítása most is a valós eset analógiája, ezért elhagyjuk.

2.3 Tétel. *Ha f és g differenciálható z_0-ban és $c \in \mathbb{C}$, akkor cf, $f \pm g$ és fg is differenciálható z_0-ban, és teljesülnek a következők*

- $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$,
- $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0)$,
- $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$,

továbbá, ha $g(z_0) \neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható z_0-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}.$$

Ha g differenciálható z_0-ban és f differenciálható $g(z_0)$-ban, akkor $f \circ g$ is differenciálható z_0-ban és

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

Az inverz függvény differenciálhatóságára vonatkozó, a valós esettel analóg komplex tétel:

2.4 Tétel. *Ha az $f : D \to \mathbb{C}$ függvény differenciálható a $z_0 \in D$ pontban és f-nek létezik inverze (vagyis f injektív), ami értelmezve van egy $f(z_0)$ körüli körlapon, továbbá $f'(z_0) \neq 0$ és f^{-1} folytonos $f(z_0)$-ban, akkor f^{-1} differenciálható $f(z_0)$-ban és*

$$(f^{-1})'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Megjegyezzük, hogy a valós esetben szükséges rengeteg feltétel nagy része elhagyható komplex esetben: Ha f reguláris és injektív D-n, akkor $f(D)$ is egy tartomány és f^{-1} reguláris $f(D)$-n. Ennek a tételnek a bizonyítása meglepően bonyolult, mi nem foglalkozunk vele.

Felhasználva, hogy z^n reguláris kapjuk, hogy minden komplex polinom, vagyis az

$$f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

alakú függvények ($a_i \in \mathbb{C}$) is regulárisak; és minden komplex racionális törtfüggvény:

$$f(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_1 z + b_0}$$

is reguláris értelmezési tartományán.

Lássunk egy-két példát nem differenciálható komplex függvényre:

1.) $f(z) = \overline{z}$ sehol sem differenciálható, mert

$$\lim_{z_0} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z_0} \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \lim_{0} \frac{\overline{z}}{z}.$$

Korábban már igazoltuk az Átviteli Elv felhasználásával, hogy ez a határérték nem létezik. Gondolkodhatunk másként is: áttréve trigonometrikus alakra (polárkoordinátákra) kapjuk, hogy tovább egyenlő

$$\lim_{r \to 0} \frac{r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \lim_{r \to 0} \cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi),$$

ami nem létezik.

2.) $f(z) = |z|$ sehol sem differenciálható, mert 0-ban a valós irányból x valós paraméterrel:

$$\lim_{0} \frac{|z| - |0|}{z - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x},$$

amiről tudjuk, hogy nem létezik (jobbról $+1$, balról -1). A $z_0 = x_0 + y_0 i \neq 0$-ban valós irányból ($y = y_0$):

$$\lim_{z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{|(x + y_0 i)| - |x_0 + y_0 i|}{(x + y_0 i) - (x_0 + y_0 i)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{x - x_0},$$

ami $\sqrt{x^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$-vel bővítve tovább egyenlő

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(x^2 + y_0^2) - (x_0^2 + y_0^2)}{(x - x_0)(\sqrt{x^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})} = \lim_{x \to x_0} \frac{x + x_0}{\sqrt{x^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} =$$

$$\frac{x_0 + x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Hasonlóan meggondolható, hogy képzetes irányból ($x = x_0$):

$$\lim_{z_0} \frac{|z| - |z_0|}{z - z_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{|(x_0 + yi)| - |x_0 + y_0 i|}{(x_0 + yi) - (x_0 + y_0 i)} = \frac{y_0}{i\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Ha $x_0 + iy_0 \neq 0$, akkor $\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \neq \frac{y_0}{i\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$, tehát $|z|$ nem differenciálható $x_0 + iy_0$-ban.

Cauchy-Riemann egyenletek

Mit mondhatunk az $u, v : D \to \mathbb{R}$ valós függvényekről, ha az $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ komplex függvény differenciálható egy $z_0 = x_0 + y_0 i$ pontban?

$$f'(z_0) = \lim_{z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x_0, y_0)} \frac{u(x, y) + iv(x, y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{x + iy - x_0 - iy_0} =$$

$$\lim_{(x_0, y_0)} \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0 + i(y - y_0)}.$$

Ha $y = y_0$, vagyis a valós tengely irányából:

$$f'(z_0) = \lim_{x_0} \Big(\frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}\Big) =$$

$$\lim_{x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = u'_x(x_0, y_0) + iv'_x(x_0, y_0).$$

Hasonlóan, ha $x = x_0$, vagyis a képzetes tengely irányából:

$$f'(z_0) = -iu'_y(x_0, y_0) + v'_y(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) + i(-u'_y(x_0, y_0)).$$

Ezt az észrevételt fogalmazzuk meg tétel formájában is.

2.5 Tétel. *Ha $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ és f differenciálható $z_0 \in D$-ben, akkor u és v parciálisan differenciálható a z_0-pontban és teljesül:*

$$f'(z_0) = u'_x(z_0) + iv'_x(z_0) = v'_y(z_0) + i(-u'_y(z_0)),$$

vagy másképpen

$$f'(z_0) = u'_x(z_0) + i(-u'_y(z_0)) = v'_y(z_0) + iv'_x(z_0).$$

A tétel már mutatja, hogy mennyire speciális egy függvény komplex differenciálhatósága, hiszen például egy pontbeli deriváltja kifejezhető külön-külön mindkét koordináta-függvényével.

Többet is mondhatunk u és v differenciálhatóságáról.

2.6 Tétel. *Ha $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ és f differenciálható z_0-ban, akkor u és v differenciálható z_0-ban.*

Bizonyítás. Akárcsak az egyváltozós valós esetben, most is könnyen belátható, hogy egy $f : D \to \mathbb{C}$ függvény differenciálhatósága egy $z_0 \in D$ pontban ekvivalens azzal, hogy létezik egy $r_{z_0} : D \to \mathbb{C}$ függvény és egy $A \in \mathbb{C}$ (ez lesz $f'(z_0)$), hogy minden $z \in D$-re

$$f(z) = f(z_0) + A(z - z_0) + r_{z_0}(z) \text{ és } \lim_{z_0} \frac{r_{z_0}(z)}{z - z_0} = 0, \text{ vagyis } \lim_{z_0} \frac{r_{z_0}(z)}{|z - z_0|} = 0.$$

Másképpen: létezik egy $A \in \mathbb{C}$, hogy

$$\lim_{z_0} \frac{f(z) - (f(z_0) + A(z - z_0))}{|z - z_0|} = 0.$$

Ha $f = u + iv$ akkor az utolsóba helyettesítve ($z_0 = x_0 + y_0 i$) kapjuk hogy

$$\lim_{z_0} \frac{u(z) + iv(z) - (u(z_0) + iv(z_0) + A(z - z_0))}{|z - z_0|} =$$

$$\lim_{(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) + iv(x,y) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) + A((x - x_0) + (y - y_0)i))}{|(x - x_0) + (y - y_0)i|} = 0.$$

$A = a + bi (= \mathrm{Re}(f'(z_0)) + \mathrm{Im}(f'(z_0))i)$ jelöléssel:

$$A((x - x_0) + (y - y_0)i) = (a(x - x_0) - b(y - y_0)) + (a(y - y_0) + b(x - x_0))i =$$

$$(a, -b)(x - x_0, y - y_0) + (b, a)(x - x_0, y - y_0)i,$$

ahol vektorok egymás mellé írása most természetesen skaláris szorzást jelent. A fenti limesz valós illetve képzetes része:

$$\lim_{(x_0,y_0)} \frac{u(x,y) - (u(x_0,y_0) + (a,-b)(x - x_0, y - y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

$$\lim_{(x_0,y_0)} \frac{v(x,y) - (v(x_0,y_0) + (b,a)(x - x_0, y - y_0))}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0,$$

vagyis u és v differenciálhatók z_0-ban. $\square$

A 2.6 Tétel bizonyításából persze ismét látszik, hogy $f'(z_0) = u'_x(z_0) + i(-u'_y(z_0)) = v'_y(z_0) + i(v'_x(z_0))$, hiszen $f'(z_0) = a + bi$ jelöléssel a bizonyítás végéből $\operatorname{grad} u(z_0) = (a, -b)$ és $\operatorname{grad} v(z_0) = (b, a)$.

2.7 Definíció. *Adott $u, v : D \to \mathbb{R}$ függvények esetén azt mondjuk, hogy u* és *v* kielégíti a Cauchy-Riemann (CR) egyenleteket *$z_0 \in D$*-ben*, ha parciálisan differenciálhatók z_0-ban és eleget tesznek a következő egyenleteknek:*

- $u'_x(z_0) = v'_y(z_0)$,
- $u'_y(z_0) = -v'_x(z_0)$.

A 2.5 és a 2.6 Tételek (vagy csak a 2.6 Tétel és a bizonyítása utáni megjegyzés) együtt azt állítják, hogy ha $f = u + iv$ differenciálható z_0-ban, akkor u és v is differenciálhatók z_0-ban és kielégítik a CR-egyenleteket z_0-ban.

Ennek segítségével már sok esetben könnyen meg tudjuk mutatni egy függvényről, hogy nem differenciálható egy pontban. Például: $f(z) = \overline{z}$ esetén $u(x, y) = x$ és $v(x, y) = -y$, így $u'_x = 1 \neq -1 = v'_y$, ezért f egyetlen pontban sem differenciálható.

Mi a helyzet visszafelé? Vagyis az, hogy u és v differenciálhatók és kielégítik a CR-egyenleteket egy pontban elég-e f differenciálhatóságához az adott pontban? A válasz igen, vagyis f adott pontbeli differenciálhatóságára szükséges és elégséges feltételt kaptunk. Ennek bizonyítása egyszerűen a 2.6 Tétel bizonyításának "fordított leírása".

2.8 Tétel. (**Összefoglaló**) *Legyen $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$ és $z_0 \in D$. Ekkor f pontosan akkor differenciálható z_0-ban, ha u és v differenciálhatók z_0-ban és kielégítik a CR-egyenleteket z_0-ban.*

Felhasználva a többváltozós valós analízisből ismert elégséges feltételt pontbeli differenciálhatóságra, kapjuk a következőt.

2.9 Következmény. *Ha $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, z_0 egy környezetében u és v parciálisan differenciálhatók, z_0-ban a parciális deriváltjaik folytonosak, továbbá kielégítik a CR-egyenleteket z_0-ban, akkor f differenciálható z_0-ban.*

Lássunk egy példát. Mely pontokban differenciálható az $f(z) = \overline{z}^2 z + z^2$ függvény?

$$f(x + yi) = (x - yi)(x - yi)(x + iy) + (x^2 - y^2 + 2xyi) =$$

$$(x - yi)(x^2 + y^2) + (x^2 - y^2 + 2xyi) = (x^3 + xy^2) - i(x^2 y + y^3) + (x^2 - y^2 + 2xyi) =$$

$$(x^3 + x^2 + xy^2 - y^2) + i(-y^3 - x^2 y + 2xy).$$

Világos, hogy u és v mindenhol differenciálható. $u'_x = 3x^2 + 2x + y^2$, $u'_y = 2xy - 2y$, $v'_x = -2xy + 2y$ és $v'_y = -3y^2 - x^2 + 2x$.

$u'_x = v'_y$ azt jelenti, hogy $3x^2 + 2x + y^2 = -3y^2 - x^2 + 2x$, amiből $x^2 = -y^2$, vagyis $x = y = 0$;

$u'_y = -v'_x$ azt jelenti, hogy $2xy - 2y = 2xy - 2y$, ami azonosság.

Kaptuk tehát, hogy u és v a CR-egyenleteket csak 0-ban elégítik ki, így f csak 0-ban differenciálható. f sehol sem reguláris, mert nincsen olyan tartomány, melynek minden pontjában differenciálható.

2.10 Feladat. Bizonyítsa be a CR-egyenletek segítségével, hogy az $f(z) = |z|$ függvény sehol sem differenciálható.

2.11 Feladat. Hol differenciálható az $f(z) = z|z|$ függvény?

2.12 Feladat. Hol differenciálható az $f(z) = z + i|z|$ függvény?

A CR-egyenletek következményei

A következő tétel jólismert a többváltozós valós analízisből.

2.13 Tétel. *Ha $D \subseteq \mathbb{R}^2$ egy tartomány, $u : D \to \mathbb{R}$ differenciálható D-n és* $\operatorname{grad} u \equiv (0, 0)$*, akkor u konstans D-n.*

2.14 Tétel. *Ha $f \in \mathcal{O}(D)$ és $f' \equiv 0$, akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. Mivel $f' = u'_x + iv'_x = v'_y + i(-u'_y)$, így $u'_x \equiv u'_y \equiv v'_x \equiv v'_y \equiv 0$. Továbbá a 2.6 Tétel miatt u és v differenciálható D-n, ezért alkalmazva a 2.13 Tételt kapjuk, hogy u és v konstans D-n, így f is konstans D-n. □

2.15 Következmény. *Ha $f = u + iv : D \to \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(D)$ és vagy $u \equiv 0$ (f tisztán képzetes értékű) vagy $v \equiv 0$ (f valós értékű), akkor f konstans D-n.*

Bizonyítás. Csak az első állítást bizonyítjuk, a második bizonyítása analóg. Mivel $u \equiv 0$, ezért $u'_x \equiv u'_y \equiv 0$, így $f' = u'_x + i(-u'_y) \equiv 0$. Alkalmazva a 2.14 Tételt kapjuk az állítást. □

2.16 Következmény. *Ha $f, \overline{f} \in \mathcal{O}(D)$, akkor f (és így $\overline{f}$ is) konstans D-n.*

Bizonyítás. Mivel $f + \overline{f} = 2u$ és $f - \overline{f} = 2iv$, ezért ezekre alkalmazva a 2.15 Következményt kapjuk, hogy u és v konstans D-n, így f is az. □

2.17 Következmény. *Ha $f \in \mathcal{O}(D)$ és $|f|$ konstans D-n, akkor f is konstans D-n.*

Bizonyítás. Ha $|f| \equiv 0$, akkor $f \equiv 0$. Ha $|f| \equiv c \neq 0$, akkor mivel $c^2 \equiv |f|^2 = f\overline{f}$, ezért $\overline{f} = \frac{c^2}{f}$ is reguláris D-n. Alkalmazva a 2.16 Következményt kapjuk az állítást. □

3. Hatványsorok

Hatványsorok alaptulajdonságai

A komplex hatványsorokat a valósak analógiájára definiáljuk. Ha a_n $(n \in \mathbb{N})$ egy komplex sorozat és $z_0 \in \mathbb{C}$, akkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

függvénysort z_0 *középpontú (komplex) hatványsornak* nevezzük. Ennek *konvergenciasugara*:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Ha $z_0 \in \mathbb{C}$ és $\epsilon > 0$, akkor (mint $\mathbb{R}^2$-ben)

$$S(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

a z_0 középpontú ϵ sugarú nyílt körlap illetve

$$B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

a z_0 középpontú ϵ sugarú zárt körlap a komplex síkon. A következő tétel a hatványsorok valósból megismert tulajdonságainak komplex megfelelőit foglalja össze, bizonyítása analóg valós megfelelőjének bizonyításával.

3.1 Tétel. *Legyen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ egy (komplex) hatványsor, melynek konvergencia sugara $R > 0$. Ekkor teljesülnek a következők:*

- *$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ abszolút konvergens az $S(z_0, R)$ nyílt körlapon (vagyis annak minden pontjában), minden kisebb $S(z_0, r)$, $0 < r < R$ körlapon egyenletesen konvergens és a $B(z_0, R)$ zárt körlapon kivül divergens. Vagyis ha $K \subseteq \mathbb{C}$ a hatványsor konvergencia halmaza, akkor $S(z_0, R) \subseteq K \subseteq B(z_0, R)$.*

- *Az $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ függvény reguláris az $S(z_0, R)$ nyílt körlapon és minden $z \in S(z_0, R)$-re*

  $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (z - z_0)^{n-1}.$$

  (Vagyis a hatványsorokat tagonként lehet deriválni.) Továbbá a derivált hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsor konvergenciasugarával. Természetesen ebből azt is megkaptuk, hogy f tetszőlegesen sokszor differenciálható $S(z_0, R)$-en.

- *Minden $n \in \mathbb{N}$-re $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, így ha egy függvény egy nyílt körlapon hatványsorba fejthető (a körlapon egyenlő egy hatványsor összegfüggvényével), akkor a hatványsor együtthatói egyértelműek.*

Egyenlőre még nem láttunk példát a valós esetben előforduló "kellemetlen" kivételekre, vagyis például olyan függvényre, ami csak egyszer differenciálható egy tartományon, vagy, bár tetszőleges sokszor deriválható egy pont körül, mégsem fejthető hatványsorba (vagy $R = 0$, vagy nem állítja elő a függvényt a Taylor-sora). Később látni fogjuk, hogy ilyen példák komplexben nincsenek is! Vagyis ha egy függvény egy tartományon differenciálható, akkor ott tetszőleges sokszor is differenciálható, és Taylor-sora a lehető legnagyobb körlapokon előállítja a függvényt.

Határozza meg a következő hatványsorok középpontját és konvergenciasugarát, továbbá adjon meg egy pontot a konvergenciakör határán, melyben a hatványsor divergens.

3.2 Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n$.

3.3 Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3(z+1-i)^n}{n!}$.

3.4 Feladat. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-i)(1-2i)\cdots(1-ni)}$.

Az exp és log függvények

Első és egyik legfontosabb példánk:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Ennek a hatványsornak a konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n!}\right|}} = \lim \sqrt[n]{n!} = +\infty,$$

vagyis exp egy egészfüggvény, $\exp \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Összefoglaljuk ennek a függvénynek a tulajdonságait.

3.5 Tétel. *Az* exp *függvényre teljesülnek a következők:*

(a) $\forall\ x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}\ \exp(x) = e^x$,

(b) $\exp' = \exp$,

(c) $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$,

(d) $\forall\ x, y \in \mathbb{R}\ \exp(x + yi) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$,

(e) exp $2\pi i$ *szerint periodikus (és ez a "legkisebb" periódus), vagyis*

$$\forall\ z, w \in \mathbb{C}\ (\exp(z) = \exp(w) \iff \exists\ k \in \mathbb{Z}\ z - w = k2\pi i),$$

(f) $\forall\ z \in \mathbb{C}\ \exp(z) \neq 0$.

Bizonyítás. (a): Triviális, hiszen a komplex műveletek valós számokra a szokásos valós eredményt adják, és egy valós sorozat határértéke komplex értelemben ugyanaz a szám mint valós értelemben.

(b): A 3.1 Tétel szerint

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

(c): Fix $a \in \mathbb{C}$-re legyen $f(z) = \exp(z)\exp(a-z)$ egészfüggvény. Ekkor

$$f'(z) = \exp'(z)\exp(a-z) + \exp(z)\exp'(a-z)(-1) =$$

$$\exp(z)\exp(a-z) - \exp(z)\exp(a-z) = 0,$$

így a 2.14 Tétel szerint $f \equiv c \in \mathbb{C}$. Mi ez a konstans? $c = f(0) = \exp(0)\exp(a) = \exp(a)$. Igy minden $a, z \in \mathbb{C}$-re $\exp(z)\exp(a-z) = \exp(a)$. Alkalmazzunk ezt az $a = z_1 + z_2$, $z = z_1$ választással:

$$\exp(z_1)\exp((z_1+z_2)-z_1) = \exp(z_1+z_2),$$

vagyis $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1+z_2)$.

(d): Alkalmazzuk (a)-t és (c)-t:

$$\exp(x+yi) = \exp(x)\exp(yi) = e^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = e^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}y^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) =$$

$$e^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!} + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)).$$

(e): Alkalmazzuk (d)-t: ha $z = x_1 + iy_1$ és $w = x_2 + iy_2$, akkor

$$\exp(z) = \exp(w) \iff e^{x_1}(\cos(y_1) + i\sin(y_1)) = e^{x_2}(\cos(y_2) + i\sin(y_2)).$$

Tehát $\exp(z) = \exp(w)$ pontosan akkor, ha $e^{x_1} = e^{x_2}$ és létezik $k \in \mathbb{Z}$, hogy $y_1 = y_2 + k2\pi$, azaz ha $x_1 = x_2$ és létezik $k \in \mathbb{Z}$, hogy $y_1 = y_2 + k2\pi$. Másképpen: $\exists\ k \in \mathbb{Z}\ z - w = k2\pi i$.

(f): Triviális (d)-ből: $e^x \neq 0$ és $\cos(y) + i\sin(y) \neq 0$ (a cos és a sin egyszerre sehol sem 0). $\square$

Mostantól általában $\exp(z)$ helyett a természetesebb e^z jelölést használjuk komplex számok esetén is, ami a 3.5 Tétel (a) pontja szerint nem okoz félreértést. Az $e^{i\pi} + 1 = 0$ illusztris egyenlet a 3.5 Tétel (d) pontjának triviális következménye.

3.6 Tétel. *Legyen* $E = \{z \in \mathbb{C} : -\pi \leq \mathrm{Im}(z) < \pi\}$. *Ekkor az*

$$\exp \restriction E : E \to \mathbb{C}$$

függvény bijekció E *és* $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ *között, vagyis minden* $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*-hoz létezik egyetlen* $z \in E$*, hogy* $\exp(z) = w$.

Bizonyítás. Mivel E-ben nincsen $z \neq w$, amikre $z - w = k2\pi i$ valamely $k \in \mathbb{Z}$-vel, ezért az injektívitást a 3.5 Tétel (e) pontjából kapjuk. A 3.5 Tétel (f) pontja szerint $\exp(z) \neq 0$ egyetlen z-re sem. Már csak azt kell belátnunk, hogy a függvény szürjektív.

Legyen $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tetszőleges. Definiáljuk w *argumentumát*:

$$\arg(w) \in [-\pi, \pi) \text{ és } w = |w|(\cos(\arg(w)) + i\sin(\arg(w))).$$

Legyen $\log(w) = \ln(|w|) + i\arg(w) \in E$ a w ***logaritmusa***. Ekkor

$$\exp(\log(w)) = e^{\ln(|w|)}(\cos(\arg(w)) + i\sin(\arg(w))) =$$

$$|w|(\cos(\arg(w)) + i\sin(\arg(w))) = w.$$

$\square$

Vizsgáljuk meg a 3.6 Tétel bizonyítása során definiált

$$\log : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$$

logaritmus függvényt. Jelölje $\mathbb{R}^-$ ($\mathbb{R}_0^-$) a 0-nál kisebb (egyenlő) valós számok halmazát.

3.7 Tétel. *A* log *függvény folytonos* $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$*-en, de nem folytonos a negatív valós számokban, vagyis* $\mathbb{R}^-$ *pontjaiban.*

Bizonyítás. Legyen $w \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ és $\epsilon > 0$ tetszőleges. Találnunk kell egy $\delta > 0$-t, hogy

$$\forall\ s \in S(w, \delta)\setminus\{0\}\ \log(s) \in S(\log(w), \epsilon).$$

Legyen $\delta_1 > 0$ olyan, hogy

$$(\ln(|w|) - \delta_1, \ln(|w|) + \delta_1) \times (\arg(w) - \delta_1, \arg(w) + \delta_1) \subseteq S(\log(w), \epsilon).$$

Ilyet δ_1-et könnyen találhatunk, egyszerűen arról van szól, hogy egy $\log(w)$ középű körlap tartalmaz $\log(w)$ középű négyzetet.

Az ln függvény $|w|$-beli folytonossága miatt létezik egy $\delta_1' > 0$, hogy

$$\forall\ r > 0\ (||w| - r| < \delta_1' \Rightarrow |\ln(|w|) - \ln(r)| < \delta_1).$$

Legyen

$$S = \{s \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : ||w| - |s|| < \delta_1' \text{ és } |\arg(w) - \arg(s)| < \delta_1\},$$

egy w körüli körgyűrű-szelet. Világos, hogy minden $s \in S$-re $\log(s) \in S(\log(w), \epsilon)$, vagyis $\log(S) \subseteq S(\log(w), \epsilon)$.

Legyen $\delta > 0$, olyan hogy $S(w, \delta) \subseteq S$. Ekkor δ megfelelő, vagyis log folytonos w-ben.

Ha $r \in \mathbb{R}^-$, akkor legyen $a_n = |r|(\cos(\pi - \frac{1}{n}) + i\sin(\pi - \frac{1}{n}))$ és $b_n = |r|(\cos(\pi + \frac{1}{n}) + i\sin(\pi + \frac{1}{n}))$. Világos, hogy $a_n \to r$ és $b_n \to r$. Azonban

$$\log(a_n) = \ln(|r|) + i\Big(\pi - \frac{1}{n}\Big) \to \ln(|r|) + i\pi,$$

$$\log(b_n) = \ln(|r|) + i\Big(-\pi + \frac{1}{n}\Big) \to \ln(|r|) + i(-\pi),$$

vagyis az Átviteli Elv miatt a log függvény nem folytonos $\mathbb{R}^-$ pontjaiban. $\square$

A 2.4 Tétel alkalmazásaként kapjuk a következőt.

3.8 Tétel. *A* log *függvény differenciálható* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ *minden pontjában, vagyis reguláris* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$*-n és minden* $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$*-re*

$$\log'(w) = \frac{1}{e^{\log(w)}} = \frac{1}{w}.$$

Most már definiálhatjuk a komplex hatványozást is. Ha $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ és $z \in \mathbb{C}$, akkor legyen

$$w^z = e^{z\log(w)}.$$

Például:

1.) $(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(\ln(1)+i\pi)} = e^{i^2\pi} = e^{-\pi}$.

2.) $i^i = e^{i\log(i)} = e^{i(\ln(1)+i\frac{\pi}{2})} = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Trigonometrikus és hiperbolikus függvények

További példákat adunk hatványsorokra. A valós eset analógiájára legyenek:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Jelölésünk nem zavaró, ugyanis valós z-kre a szokásos sin illetve cos függvényeket kapjuk. Akárcsak valósban, mindkét hatványsor konvergencia sugara $+\infty$, így sin és cos egészfüggvények.

3.9 Állítás. $\sin' = \cos$ *és* $\cos' = -\sin$.

Bizonyítás. A 3.1 Tétel felhasználásával:

$$\sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)\frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z).$$

A állítás másik fele teljesen hasonlóan bizonyítható. □

3.10 Állítás. $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ *és* $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$.

Bizonyítás. Most is csak az állítás első felét bizonyítjuk, a második bizonyítása teljesen hasonló.

$$\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-iz)^n}{n!}\Big) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n - (-iz)^n}{n!} =$$

$$\frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(i^n(1-(-1)^n))\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}2i^{2n+1}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}i^{2n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(z).$$

□

3.11 Következmény. (Euler Tétel) $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$.

A 3.10 Állítás segítségével már könnyen igazolhatók a valósból megismert trigonometrikus összefüggések komplexben, például:

$$\sin(z \pm w) = \sin(z)\cos(w) \pm \sin(w)\cos(z),$$

$$\cos(z \pm w) = \cos(z)\cos(w) \mp \sin(z)\sin(w),$$
$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1.$$

3.12 Feladat. Bizonyítsa be ezeket az összefüggéseket.

Később látni fogjuk, hogy az ehhez hasonló azonosságok megmaradásához nincs is szükség a komplexre kiterjesztett valós függvény mélyebb ismeretére, azonnal adódik az 5.18 Unicitás Tétel illetve a Permanencia Elv alkalmazásával.

A 3.10 állítából azt is megkaptuk, hogy sin és cos függvények 2π szerint periodikusak, ugyanis az e^z függvény $2\pi i$ szerint periodikus, így e^{iz} 2π szerint. Ez természetesen a legkisebb periodus is, mert valósban ez volt a legkisebb. Ezeknek a függvényeknek csak valós gyökei vannak, ugyanis a 3.10 Állítás és a 3.5 Tétel (e) részének alkalmazásával például a sin esetében:

$$\sin(z) = 0 \iff e^{iz} = e^{-iz} \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}\ iz - (-iz) = k2\pi i \iff$$

$$\exists\, k \in \mathbb{Z}\ z = k\pi.$$

Még további két függvényt definiálunk. A komplex hiperbolikus függvények:

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

Ismét látszik, hogy valós számokra az eredeti, valós hiperbolikus függvényeket kapjuk. Az azonosságok most is igazak maradnak, például:

$$\operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh}(z),\ \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch}(z) \text{ vagy } \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) = 1.$$

A 3.10 Állítás segítségével könnyen ellenőrizhető a következő állítás.

3.13 Állítás. *Minden $z \in \mathbb{C}$-re teljesülnek a következők:*

- $\operatorname{sh}(iz) = i\sin(z)$ *illetve* $\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z)$,
- $\operatorname{ch}(iz) = \cos(z)$ *illetve* $\cos(iz) = \operatorname{ch}(z)$.

3.14 Feladat. Bizonyítsa be a 3.13 Állítást.

3.15 Feladat. Oldja meg a $\sin(z) + \cos(z) = 0$ egyenletet.

4. Vonalintegrál

Görbék a komplex síkon

A komplex sík görbéi természetesen megfelelnek a valós sík görbéinek. Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, akkor $\gamma = x + iy$ alakba írható, ahol $x, y : [a,b] \to \mathbb{R}$, vagyis minden $t \in [a,b]$-re $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$.

Ez a görbe megfelel a $\gamma = (x,y)$ síkgörbének. Minden γ görbéről feltesszük, hogy **folytonos**, vagyis komplex megfogalmazásban:

$$\forall\ t \in [a,b]\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ s \in [a,b]\ (|t-s| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s)| < \epsilon).$$

Mivel γ egy korlátos zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, ezért a Heine Tétel szerint γ egyenletesen folytonos, vagyis

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ s,t \in [a,b]\ (|t-s| < \delta \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(s)| < \epsilon).$$

Egy $\gamma = x + iy : [a,b] \to \mathbb{C}$ görbe

- *zárt*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- *egyszerű*, ha nem metszi át magát, legfeljebb a végpontok képe azonos;
- *differenciálható* $t_0 \in [a,b]$*-ben*, ha valós értelemben differenciálható t_0-ban (komplexben a fogalom értelmetlen!), vagyis x és y is differenciálható t_0-ban.

Ha $\gamma = x + iy$ differenciálható t_0-ban akkor deriváltjára a

$$\dot{\gamma}(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

komplex jelölést fogjuk használni.

Fontos lesz még a görbék irányítása. Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, akkor

$$\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, \gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$$

a fordított irányítású görbe. A félreértések elkerülése végett igyekszünk nem használni γ^--ra a egyébként bevett $-\gamma$ jelölést.

Természetesen más módon is megadhatunk görbéket. Például polárkoordinátás alakban: $\gamma(t) = r(t)e^{i\varphi(t)}$ (valós jelöléssel: $\gamma = (r, \varphi)$).

Végezetül kimondjuk a híres Jordan Tételt, ami azt "kézenfekvő" és "szemléletes" tényt állítja, hogy egy folytonos egyszerű zárt görbe két részre osztja a síkot. Bizonyítása rendkívül nehéz, messze meghaladja jegyzetünk kereteit.

4.1 Tétel. (Jordan Tétele) *Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egy folytonos egyszerű zárt görbe, akkor $\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{ran}(\gamma)$ két diszjunkt tartomány uniója. Ezek közül a korlátosat nevezzük a* görbe belsejének*, a nem korlátosat a* görbe külsejének.

Komplex görbementi integrál

Emlékeztetünk a valós integrál alsó-, felső közelítő összeg nélküli definíciójára. Az $[a,b]$ intervallum egy *felosztásán* szokás szerint egy $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ véges sorozatot értünk; ez *finomabb, mint* δ, ha

$$\forall\ k = 1, \ldots, n\ |t_k - t_{k-1}| < \delta.$$

A $t_0 < \cdots < t_n$ *felosztásra illeszkedő sorozaton* egy

$$\xi_k \in [t_{k-1}, t_k] \ (k = 1, \ldots, n)$$

sorozatot értünk.

Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, akkor g *integrálható* $[a,b]$*-n* és $\int_a^b g = I$, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztás és rá illeszkedő ξ_k $(k = 1 \ldots, n)$ sorozat esetén

$$\Big| I - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \Big| < \epsilon.$$

Általánosítsuk ezt a fogalmat komplexben:

4.2 Definíció. *Ha $a < b \in \mathbb{R}$ és $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, akkor g* integrálható $[a,b]$-n *és $\int_a^b g = I \in \mathbb{C}$, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztás és rá illeszkedő ξ_k $(k = 1 \ldots, n)$ sorozat esetén*

$$\Big| I - \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(t_k - t_{k-1}) \Big| < \epsilon.$$

A következő tétel bizonyítása a szokásos "minden kör tartalmaz téglalapot, illetve minden téglalap tartalmaz kört" gondolatmenetet használja.

4.3 Tétel. *Legyen $a < b \in \mathbb{R}$ és $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, $g = u + iv$. g pontosan akkor integrálható $[a,b]$-n, ha u és v is integrálható $[a,b]$-n, és ekkor*

$$\int_a^b g = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

4.4 Feladat*. Bizonyítsa be az 4.3 Tételt.

Az általánosítás következő lépése, hogy nem egy valós intervellumon, hanem egy komplex görbén integrálunk. Ehhez emlékeztetünk egy görbe felosztásának finomságára.

4.5 Definíció. *Ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ egy görbe, akkor az $a = t_0 < \ldots t_n = b$ felosztás γ*-n finomabb δ-nál, *ha minden $k = 1, \ldots, n$-re $\gamma\big([t_{k-1}, t_k]\big)$ lefedhető egy δ átmérőjű nyílt körlappal.*

4.6 Definíció. *Ha $a < b \in \mathbb{R}$, $\gamma : [a,b] \to D$ egy görbe és $f : D \to \mathbb{C}$, akkor f* integrálható γ-n *és $\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz = I \in \mathbb{C}$, ha minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden γ-n δ-nál finomabb $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztás és rá illeszkedő ξ_k $(k = 1 \ldots, n)$ sorozat esetén*

$$\Big| I - \sum_{k=1}^{n} f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \Big| < \epsilon.$$

Természetesen nem kell, hogy f egy D tartományon legyen értelmezve, elég, hogy $\mathrm{ran}(\gamma)$-n értelmezett. A konkrét esetekben azonban mindig egy tartományon értelmezett függvény és egy a tartományban haladó görbe lesz megadva. Igy valóban általánosítást kaptunk, hiszen γ választható az $[a,b]$ intervallum identitásának ($\gamma : [a,b] \to [a,b] \subseteq \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t$).

Hogyan számoljunk ki egy ilyen integrált? Mostantól minden $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ görbéről a folytonosság mellett feltesszük még, hogy

γ **szakaszonként folytonosan differenciálható**,

vagyis létezik $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ felosztás, hogy minden $k = 1, \ldots, n$-re γ folytonosan differenciálható $[t_{k-1}, t_k]$-n (végpontokban egyoldalról).

Ismert, hogy ekkor γ rektifikálható és γ ívhossza

$$|\gamma| = \int_a^b |\dot{\gamma}| = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2},$$

ahol $\gamma = x + iy$. A következő tétel segítségével már könnyen kiszámolhatunk vonalintegrálokat. Bizonyítása teljesen hasonló a valós vonalintegrálra vonatkozó megfelelője bizonyításához, így elhagyjuk.

4.7 Tétel. *Ha $[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ és f folytonos D-n, akkor létezik $\int_\gamma f$ és*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

Lássunk egy példát. Legyen $r > 0$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = r(\cos(t) + i\sin(t))$ az origó középpontú r sugarú körvonal egy paraméterezése és $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$. Ekkor

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r(\cos(t) + i\sin(t))} r(-\sin(t) + i\cos(t))dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{-\sin(t) + i\cos(t)}{\cos(t) + i\sin(t)}dt = \int_0^{2\pi} idt = \int_0^{2\pi} 0dt + i\int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi i.$$

Teljesen hasonlóan ellenőrizhető, hogy ha $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$ és $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = w + r\cos(t) + ir\sin(t)$ az w középpontú r sugarú körvonal egy paraméterezése, akkor $\int_\gamma \frac{1}{z-w}dz = 2\pi i$. Később látni fogjuk, hogy bizonyos értelemben ez a legfontosabb konkrét integrál.

A 4.7 Tétel segítségével számítsa ki a következő integrálokat:

4.8 Feladat. γ a $[0, 1+i]$ szakasz egy paraméterezése, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$.

4.9 Feladat. γ a $|z| = 2$ kör egy paraméterezése, $f(z) = \frac{z+2}{z}$.

Az integrál tulajdonságai

Mennyire függ az integrál a görbe paraméterezésétől?

4.10 Tétel. *Legyen $[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, f folytonos D-n és $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ egy átparaméterezés, vagyis egy folytonosan differenciálható szogorúan monoton függvény, amire $\varphi(c) = a$ és $\varphi(d) = b$. Lerajzolva:*

$$\begin{tikzcd}
{[a,b]} \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r, "f"] & \mathbb{C} \\
{[c,d]} \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, equal] & {[c,d]} \arrow[u, "\gamma\circ\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Ekkor

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma\circ\varphi} f.$$

Bizonyítás.

$$\int_\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(s)))\dot\gamma(\varphi(s))\varphi'(s)ds =$$

$$\int_c^d f((\gamma\circ\varphi)(s))(\gamma \dot\circ \varphi)(s)ds = \int_{\gamma\circ\varphi} f.$$

Ahol az első és utolsó egyenlőséget a 4.7 Tétel adja. A második egyenlőséget a $t = \varphi(s)$ valós helyettesítéses integrál egyszerre a valós és a képzetes részben. A harmadik egyenlőséget pedig a $(\gamma \dot\circ \varphi)(s) = \dot\gamma(\varphi(s))\varphi'(s)$ képlet (összetett függvény differerenciálása). □

4.11 Tétel. *Ha* $[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$ *és* f *folytonos* D*-n, akkor*

$$\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f.$$

Bizonyítás. A 4.10 Tétel bizonyítását módosítjuk egy kicsit. Most $\varphi : [a,b] \to [a,b]$, $\varphi(s) = a+b-s$.

$$\int_\gamma = \int_a^b f(\gamma(t))\dot\gamma(t)dt = \int_b^a f(\gamma(\varphi(s)))\dot\gamma(\varphi(s))\varphi'(s)ds =$$

$$\int_b^a f(\gamma^-(s))\dot{\gamma^-}(s)ds = -\int_a^b f(\gamma^-(s))\dot{\gamma^-}(s)ds = -\int_{\gamma^-} f.$$

Ahol első és utolsó egyenlőséget a 4.7 Tétel adja. A második egyenlőséget a $t = \varphi(s)$ valós helyettesítéses integrál egyszerre a valós és a képzetes részben. A harmadik egyenlőséget a $\dot{\gamma^-}(s) = (\gamma \dot\circ \varphi)(s) = \dot\gamma(\varphi(s))\varphi'(s)$ képlet. A negyedik egyenlőséget pedig a valós integrálra vonatkozó $\int_b^a = -\int_a^b$ képlet alkalmazása egyszerre a valós és a képzetes részben. □

Ha $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ és $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, akkor az *összefűzésüket* $\gamma_1 \frown \gamma_2$-vel jelöljük, vagyis ha $\gamma = \gamma_1 \frown \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$, akkor

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & \text{ha } t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & \text{ha } t \in (b,c] \end{cases}$$

A következő tétel triviális a definíciókból.

4.12 Tétel. *Ha* $\gamma_1 : [a,b] \to D$, $\gamma_2 : [b,c] \to D$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ *és* $f : D \to \mathbb{C}$ *folytonos, akkor*

$$\int_{\gamma_1 \frown \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

A következő tétel, akárcsak valós megfelelője könnyen belátható akár a 4.6 Definíció alapján közvetlenül is vagy még egyszerűbben a 4.7 Tétel felhasználásával.

4.13 Tétel. *Legyen $\gamma : [a,b] \to D$. Ekkor a D-n értelemezett folytonos függvények $C(D)$ vektorterén*

$$\int_\gamma : C(D) \to \mathbb{C},\ f \mapsto \int_\gamma f$$

egy lineáris leképezés (funkcionál), vagyis minden $f_1, f_2 \in C(D)$ és $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ esetén

$$\int_\gamma (c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \int_\gamma f_1 + c_2 \int_\gamma f_2.$$

Akárcsak a valós vonalintegrál esetén, most is becsülhetjük az integrál abszolút értékét.

4.14 Tétel. *Ha $[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, f folytonos D-n és $|f| \le M$ a görbe pontjaiban ($\operatorname{ran}(\gamma)$-n), akkor*

$$\Big| \int_\gamma f \Big| \le M|\gamma|.$$

Bizonyítás. Ha $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ az intervallum egy felosztása és ξ_k $(k = 1 \ldots, n)$ egy rá illeszkedő sorozat, akkor

$$\Big| \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \Big| \le \sum_{k=1}^n |f(\gamma(\xi_k))| |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \le$$

$$M \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \to M|\gamma|,$$

ha a felosztás finomodik.

Precízebben: Legyen $\epsilon > 0$ fix. Létezik $\delta > 0$, hogy minden γ-n δ-nál finomabb $a = t_0 < \cdots < t_n = b$ felosztás esetén

$$\Big| \int_\gamma f - \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \Big| < \epsilon.$$

Mivel γ egyenletesen folytonos, ezért létezik $\delta' > 0$, hogy ha egy t_k felosztás finomabb δ'-nél, akkor γ-n finomabb δ-nál. Feltehető, hogy δ'-t olyan kicsinek választottuk, hogy minden δ'-nél finomabb t_k felosztásra

$$\Big| |\gamma| - \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \Big| < \epsilon.$$

Ekkor alkalmazva a fenti egyenlőtlenséget:

$$\Big| \int_\gamma f \Big| - \epsilon < \Big| \sum_{k=1}^n f(\gamma(\xi_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \Big| \le M \sum_{k=1}^n |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| < M(|\gamma| + \epsilon),$$

amiből $\left| \int_\gamma f \right| < M|\gamma| + (M+1)\epsilon$. Mivel ϵ tetszőleges volt, ezért $\left| \int_\gamma f \right| \le M|\gamma|$. □

4.15 Következmény. *Adott D tartományon értelmezett folytonos függvényekből álló egyenletesen konvergens $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor és D-ben haladó γ görbe esetén:*

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n.$$

Bizonyítás. Legyen $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ és legyen $\epsilon > 0$ fix. Válasszunk egy N-et, hogy minden $m \geq N$-re és $z \in D$-re $\left| \sum\limits_{n=m}^{\infty} f_n(z) \right| < \epsilon$ legyen. Legyen $m \geq N$. Ekkor

$$\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \int_\gamma f_0 + \int_\gamma f_1 + \cdots + \int_\gamma f_{m-1} + \int_\gamma \sum_{n=m}^{\infty} f_n.$$

Alkalmazva a 4.14 becslést az utolsó tagra $\left| \int_\gamma \sum\limits_{n=m}^{\infty} f_n \right| \leq \epsilon |\gamma|$. Tehát minden $\epsilon > 0$-hoz létezik N, hogy minden $m \geq N$-re

$$\Big| \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n - \Big(\sum_{n=0}^{m-1} \int_\gamma f_n \Big) \Big| = \Big| \int_\gamma \sum_{n=m}^{\infty} f_n \Big| \leq \epsilon |\gamma|,$$

vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n = \lim_{m \to \infty} \Big(\sum_{n=0}^{m-1} \int_\gamma f_n \Big) = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

□

Belátjuk még, hogy a Newton-Leibniz Formula megfelelője is igaz marad komplex esetben.

4.16 Tétel. (Newton-Leibniz Formula) *Ha $\gamma : [a, b] \to D$, $F \in \mathcal{O}(D)$ és F' folytonos D-n, akkor*

$$\int_\gamma F' = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Bizonyítás. Legyen $\mu : [a, b] \to \mathbb{C}$, $\mu(t) = F(\gamma(t))$. Ekkor hogyan fejezhetnénk ki $\dot{\mu}$–t? Nem hivatkozhatunk az összetett függvény deriválási szabályára, hiszen F-et komplex értelemben deriváltuk, nem valósban, mint μ-t és γ-t. A láncszabály mégis igaz marad! Vagyis:

$$\dot{\mu}(t) = F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t).$$

Ezt nem látjuk be (lásd a következő feladatot). Alkalmazva ezt a láncszabályt a $\mu = x + iy$ jelöléssel:

$$\int_\gamma F' = \int_a^b F'(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = \int_a^b \dot{\mu}(t)dt = \int_a^b x' + i \int_a^b y' = [x]_a^b + i[y]_a^b =$$

$$x(b) - x(a) + i(y(b) - y(a)) = \mu(b) - \mu(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Tehát ha $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos és létezik primitív függvénye vagyis egy $F \in \mathcal{O}(D)$, hogy $F' = f$, akkor tetszőleges D-ben haladó görbén vett integrálja csak a végpontoktól függ, az őket összekötő görbétől független.

4.17 Feladat*. Bizonyítsa be a 4.16 Tételben említett láncszabályt. (Ötlet: Alkalmazza a CR-egyenleteket.)

Nézzünk egy-két példát.

1.) Legyen $f \equiv c \in \mathbb{C}$ egy konstans függvény és $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma = x + iy$ egy tetszőleges görbe. Ekkor a Newton-Leibniz Formula nélkül:

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt = c\int_a^b \dot{\gamma}(t)dt = c\Big(\int_a^b x' + i\int_a^b y'\Big) =$$

$$c([x]_a^b + i[y]_a^b) = c(x(b) + iy(b) - (x(a) + iy(a))) = c(\gamma(b) - \gamma(a)).$$

A Newton-Leibniz alkalmazásásval: Ha $F(z) = cz$, akkor $f = F'$, így

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = c\gamma(b) - c\gamma(a).$$

2.) Legyen $f(z) = z^2+1$ és γ az $[1,i]$ szakasz egy paraméterezése. (γ például választható a következőképpen: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = (1-t)1+ti = (1-t)+it$.) f-nek létezik primitív függvénye $F(z) = \frac{z^3}{3} + z$, így

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(i) - F(1) =$$

$$\frac{i^3}{3} + i - (\frac{1}{3} + 1) = -\frac{4}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Speciálisan, ha egy tetszőleges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ görbén integrálunk egy komplex polinomot, e^z-t, $\sin(z)$-t, $\cos(z)$-t, $\mathrm{sh}(z)$-t vagy $\mathrm{ch}(z)$-t akkor az adott függvény primitív függvényének értékét kell csak kiszámolnunk a görbe végpontjaiban és ezt a két értéket kivonunk egymásból.

Egy $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(z-w_k)^{d_k}$ $(a_k, w_k \in \mathbb{C},\ d_k \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\})$ alakú függvény esetében is ez a helyzet, ha a görbe az értelemzési tartományában halad; például $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{i}{z^5} + (1-i)(2-i+z)^3$ esetében.

Ha $f(z) = \frac{1}{z}$, akkor f tetszőleges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$ görbén vett integrálját a primitív függvénye ($\log(z)$) segítségével számolhatjuk.

A 4.16 Tétel következményeképpen kapjuk a következőt.

4.18 Következmény. *Ha az $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos függvénynek létezik primitív függvénye, akkor minden $\gamma : [a,b] \to D$ zárt görbén vett integrálja eltűnik, vagyis* 0.

Tehát az imént említett elemi függvények vagy általában, primitív függvénnyel rendelkező függvények tetszőleges az értelmezési tartományukban haladó zárt görbén vett integrálja eltűnik. ($\frac{1}{z}$ értelemzési tartományát most $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_0^-$-nak tekintjük). A következő részben a fordított implikációt is belátjuk vagyis, hogy minden zárt görbén az integrál eltűnése elég a primitív függvény létezéséhez.

Cauchy Integráltétele

4.19 Tétel. *Ha $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos és tetszőleges D-ben haladó görbén vett integrálja csak a végpontoktól függ, akkor f-nek létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. Legyen $z_0 \in D$ fix. Ekkor az úttól való függetlenség miatt minden $z \in D$-re értelmes a következő jelölés:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f,$$

vagyis tetszőleges z_0-t és z-t összekötő γ görbén (egy tartomány útösszefüggő) integrálunk. Belátjuk, hogy $F \in \mathcal{O}(D)$ és $F' = f$.

Fix z-hez legyen $S \subseteq D$ egy z középpontú nyílt körlap. Ekkor minden $\xi \in S$-re a $[z, \xi]$ zárt szakasz D-ben fekszik. Ekkor az úttól való függetlenség miatt

$$F(\xi) = \int_{\gamma \frown [z,\xi]} f = \int_{\gamma} f + \int_{[z,\xi]} f = F(z) + \int_{[z,\xi]} f,$$

vagyis

$$F(\xi) - F(z) = \int_{[z,\xi]} f.$$

$\int_{[z,\xi]} f$-t átírhatjuk a következő alakba:

$$\int_{[z,\xi]} f = \int_{[z,\xi]} f(s)ds = \int_{[z,\xi]} f(z) + (f(s) - f(z))ds =$$

$$\int_{[z,\xi]} f(z)ds + \int_{[z,\xi]} (f(s) - f(z))ds = f(z)(z - \xi) + \int_{[z,\xi]} f(s) - f(z)ds,$$

ahol az utolsó egyenlőségben használtuk a konstans függvény integráljára vonatkozó korábbi ismereteinket. Legyen

$$r_z(\xi) = \int_{[z,\xi]} f(s) - f(z)ds.$$

Fix $\epsilon > 0$-hoz a függvény z-beli folytonossága miatt létezik $\delta > 0$, hogy ha $s \in D$ és $|s - z| < \delta$, akkor $|f(s) - f(z)| < \epsilon$. Ha $|\xi - z| < \delta$, akkor minden $s \in [z, \xi]$-re $|s - z| < \delta$, így az integrál abszolút értékére vonatkozó becslésünk szerint (4.14 Tétel) ekkor

$$|r_z(\xi)| = \left| \int_{[z,\xi]} f(s) - f(z)ds \right| \leq \epsilon |\xi - z|.$$

Vagyis minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $0 < |\xi - z| < \delta$, akkor $\frac{|r_z(\xi)|}{|\xi - z|} \leq \epsilon$, így

$$\lim_{z} \frac{r_z(\xi)}{\xi - z} = 0.$$

Ez pont az F függvény z-beli differenciálhatóságát jelenti és persze azt, hogy $F'(z) = f(z)$, hiszen minden $\xi \in S$-re

$$F(\xi) = F(z) + f(z)(z - \xi) + r_z(\xi) \text{ és } \lim_{z} \frac{r_z(\xi)}{\xi - z} = 0.$$

$\square$

Összefoglalva a 4.16 és a 4.19 Tételeket:

4.20 Következmény. (**Összefoglaló**) *Ha $f : D \to \mathbb{C}$ folytonos, akkor a következők ekvivalensek:*

(a) *f-nek létezik primitív függvénye.*

(b) *f tetszőleges D-ben haladó görbén vett integrálja csak a görbe végpontjaitól függ.*

(c) *f tetszőleges D-ben haladó zárt görbén vett integrálja eltűnik.*

Bizonyítás. Az (a) és (b) ekvivalenciáját a 4.16 illetve a 4.19 Tételek adják. A (a)$\Rightarrow$(c) implikációt a 4.18 Következmény adja.

(c)$\Rightarrow$(b): Legyen γ és μ két azonos kezdő- és végpontú D-ben haladó görbe. Feltehető, hogy egymást követő intervallumkon vannak értelmezve: $\gamma : [a,b] \to D$, $\mu : [b,c] \to D$, $\gamma(a) = \mu(b)$, $\gamma(b) = \mu(c)$. Ekkor a $\gamma^\frown\mu^-$ görbe zárt, így

$$0 = \int_{\gamma^\frown\mu^-} f = \int_\gamma f + \int_{\mu^-} f = \int_\gamma f - \int_\mu f.$$

$\square$

4.21 Következmény. *Az $\frac{1}{z}$ függvénynek nincsen $\mathbb{C}\backslash\{0\}$-n értelmezett primitív függvénye.*

Bizonyítás. Már beláttuk, hogy f-nek egy a 0-t pozitív irányban megkerülő körön vett integrálja $2\pi i \neq 0$. $\square$

Természetesen, ha egy tartományon értelmezett függvénynek van primitív függvénye, akkor az a 2.14 Tétel miatt konstans hozzáadása erejéig egyértelmű.

4.22 Megjegyzés. *Ha D konvex, akkor a 4.19 Tételben $F(z)$ definiálásához nincs szükségünk az úttól való függetlenségre, hiszen integrálhatunk a $[z_0, z]$ szakaszon, csak azt használjuk, hogy*

$$F(\xi) = \int_{\gamma^\frown[z,\xi]} f$$

vagyis, hogy az integrál eltűnik a z_0, z, ξ háromszögön. Tehát konvex D esetén a 4.20 Következmény kiegészíthető még egy ekvivalens állítással:

(d) *f tetszőleges D-beli háromszögvonalon vett integrálja eltűnik.*

4.23 Tétel. (Cauchy Integráltétele) *Ha D konvex, $[a,b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, γ zárt és $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Bizonyítás. Elég csak D-beli háromszögvonalra bizonyítanunk, mert a 4.22 Megjegyzés szerint ez ekvivalens az integrál eltünésével minden zárt görbén.

Legyen T_0 a háromszöglap, ennek kerülete l_0 és legyen γ_0 a háromszög határának egy paraméterezése. Legyen $I = |\int_\gamma f|$. A háromszöget 4 egybevágó kis háromszögre osztjuk: T_0^k, $k = 1, 2, 3, 4$, ezek határának γ-val azonos irányú paraméterezése γ_0^k. Ekkor a görbék ellentétes irányításán való integrálás előjelváltása miatt a belső szakaszokon az integrálok kiesnek, így

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_0^k} f.$$

Ekkor létezik k, hogy $|\int_{\gamma_0^k} f| \geq \frac{I}{4}$. Legyen $T_1 = T_0^k$ és $\gamma_1 = \gamma_0^k$. A négyzetes arányosság miatt tudjuk, hogy T_1 kerülete $l_1 = \frac{l_0}{2}$.

Folytatjuk az eljárást T_1-en. Kapjuk a T_n egymásba skatulyázott zárt háromszöglapok sorozatát, melyek kerülete $l_n = \frac{l_0}{2^n}$, a határukat paraméterező γ_n görbéket, továbbá tudjuk, hogy

$$\Big|\int_{\gamma_n} f\Big| \geq \frac{I}{4^n}.$$

A Cantor-axióma miatt létezik (egyetlen) $z_0 \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T_n$. Mivel f differenciálható z_0-ban, ezért létezik egy $r_{z_0} : D \to \mathbb{C}$ függvény, hogy

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r_{z_0}(z) \text{ és } \lim_{z_0} \tfrac{r_{z_0}(z)}{z-z_0} = 0.$$

Ekkor

$$\int_{\gamma_n} f = f(z_0) \int_{\gamma_n} dz + f'(z_0) \int_{\gamma_n} (z - z_0)dz + \int_{\gamma_n} r_{z_0}(z)dz.$$

Mivel a konstans 1 és a $z - z_0$ függvényeknek van primitív függvénye, ezért a 4.20 Következmény szerint az első két integrál 0.

$\lim\limits_{z_0} \frac{r_{z_0}(z)}{z-z_0} = 0$ szerint minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $|\frac{r_{z_0}(z)}{z-z_0}| < \epsilon$, vagyis $|r_{z_0}(z)| < \epsilon|z-z_0|$. Mivel $r_{z_0}(z_0) = 0$, ezért $|z-z_0| < \delta$ esetén $|r_{z_0}(z)| \leq \epsilon|z - z_0|$. Fix $\epsilon > 0$-hoz legyen $\delta > 0$ megfelelő. Ekkor létezik $n \in \mathbb{N}$, hogy $T_n \subseteq S(z_0, \delta)$, így minden $z \in T_n$-re $|z - z_0| < \delta$, amiből $|r_{z_0}(z)| \leq \epsilon|z - z_0|$. Alkalmazva a triviális $|z - z_0| < l_n$ becslét T_n határán kapjuk, hogy ezekben a pontokban, vagyis $\mathrm{ran}(\gamma_n)$-en $|r_{z_0}| \leq \epsilon l_n$. Az integrál abszolút értékének becslése szerint

$$\frac{I}{4^n} \leq \Big|\int_{\gamma_n} f\Big| = \Big|\int_{\gamma_n} r_{z_0}(z)dz\Big| \leq \epsilon l_n^2 = \epsilon \frac{l_0^2}{4^n},$$

amiből $I \leq \epsilon l_0^2$ minden $\epsilon > 0$-ra, vagyis $I = 0$. □

A 4.23 Tétel és a 4.20 Következmény felhasználásával a következő érdekes eredményt kaptuk.

4.24 Következmény. *Ha D konvex és $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor f-nek létezik primitív függvénye.*

Szükségünk lesz a Cauchy Integráltétel egy általánosítására is.

4.25 Tétel. *Ha D konvex, $z_1, \ldots, z_n \in D$ és $f \in \mathcal{O}(D \backslash \{z_1, \ldots, z_n\})$, továbbá minden $k = 1, \ldots, n$-re $\lim\limits_{z_k} f(z)(z - z_k) = 0$, akkor minden $D\backslash\{z_1, \ldots, z_n\}$-beli γ zárt görbére*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Bizonyítás. Feltesszük, hogy $n = 1$, vagyis csak egy problémás pont van: z_0. Több esetén a bizonyítás analóg.

Mindenekelőtt belátjuk, hogy ismét elég csak háromszögvonalra bizonyítanunk a tételt, mert abból már következik a primitív függvény létezése, így az integrál minden zárt görbén eltűnik. Mivel egy tartomány poligonösszefüggő, ezért 4.19 Tétel bizonyításában a primitív függvény definiálásához elég feltennünk, hogy a tartományban haladó poligonokon független az integrál a poligontól, csak a végpontoktól függ, vagyis, hogy zárt poligonon az integrál eltűnik. Minden $D\backslash\{z_0\}$-beli poligon *triangulálható*, vagyis felosztható D-beli háromszögekre úgy, hogy z_0-on nem megy át egyetlen szakasz sem. Ha háromszögekre igaz a tétel állítása, akkor minden háromszöget a poligon irányitásával azonos módon irányítva és az integrálokat összeadva a poligonon vett integrált kapjuk, ami ezek szerint 0 lesz.

Legyen tehát T egy háromszöglap, határának paraméterezése γ. Feltehető, hogy z_0 a T belsejében van, különben alkalmazható a 4.23 Cauchy Integráltétel. z_0 köré rajzoljunk egy kis d oldalú z_0 középpontú négyzetet, mely része T belsejének. Ennek egy γ-val azonos irányítású paraméterezése legyen μ. A háromszög és a négyzet közötti részt véges sok szakasz behúzásával feloszthatjuk háromszögekre. A kapott kis háromszögeket γ-val azonos módon irányítva paraméterezzük el: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$. Ezekre a görbékre alkalmazható a 4.23 Tétel, vagyis f integrálja rajtuk 0. Ha összeadjuk ezeket az integrálokat, akkor a behúzott szakaszokon a függvény integrálja a két ellentétes irányítás miatt kiesik, a háromszög marad meg eredeti irányításával és a négyzet μ paraméterezése ellentétes irányítással. Kapjuk, hogy

$$\int_\gamma f - \int_\mu f = 0.$$

A $\lim\limits_{z_0} f(z)(z - z_0) = 0$ feltevés szerint minden $\epsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy $0 < |z - z_0| < \delta$ esetén $|f(z)(z - z_0)| < \epsilon$, vagyis $|f(z)| < \frac{\epsilon}{|z-z_0|}$. Vegyük észre, hogy az eddigiekben nem volt jelentősége d választásának, vagyis tetszőlegesen kicsi d-re és hozzá tartozó μ paraméterezésre igaz, hogy $\int_\gamma f = \int_\mu f$. Ha $d < \delta$, akkor a négyzet része $S(z_0, \delta)$-nak, így határának minden z pontjára $\frac{d}{2} \leq |z - z_0| \leq \frac{\sqrt{2}d}{2} < \delta$, így $|f(z)| < \frac{\epsilon}{\frac{d}{2}} = \frac{2\epsilon}{d}$. Alkalmazva az integrál abszolút értékének becslését

$$\Big|\int_\mu f\Big| \leq \frac{2\epsilon}{d} 4d = 8\epsilon.$$

Mivel ez minden $\epsilon > 0$-ra igaz, ezért $\int_\mu f = 0$, így $\int_\gamma f = 0$. □

4.26 Definíció. *Ha* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, γ *zárt és* $s \in \mathbb{C}\backslash \operatorname{ran}(\gamma)$, *akkor* γ indexe s-ben

$$n(\gamma, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - s} dz.$$

A konkrét példákból látszik, hogy informálisan: "a γ görbe $n(\gamma, s)$-szer kerüli meg s-et, ha pozitív irányban n-szer és negatív irányaban k-szor, akkor $n(\gamma, s) = n - k$". Például ha s tetszőleges és $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ egy s körüli kört paraméterez, akkor $\int_\gamma \frac{1}{z-s} dz = 2\pi i$, így $n(\gamma, s) = 1$. Ha a kört fordítva paraméterezük, akkor $n(\gamma^-, s) = -1$. Az általunk vizsgált konkrét esetekben γ mindig egy klasszikus egyszerű zárt görbét paraméterez pozitív irányban, például kört, elipszist, töröttvonalat stb. Ezekben az esetekben γ indexe belső pontjaiban 1, külső pontjaiban 0. Ha valaki úgy érzi nem tud megbarátkozni az index fogalmával és emiatt nem érti a későbbi tételeket, akkor nyugodtan gondoljon tetszőleges görbék helyett klasszikus egyszerű zárt görbékre, akár egyszerűen körökre.

A következő tétel az index nem precízen megfogalmazott, pontmegkerülést számláló tulajdonságát részben formalizálja. Bizonyítása elég technikai, ezért elhagyjuk.

4.27 Tétel. *Ha $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ és γ zárt, akkor*

$$n(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \operatorname{ran}(\gamma) \to \mathbb{Z}$$

egy egész értékű függvény, ami $\mathbb{C} \setminus \operatorname{ran}(\gamma)$ minden összefüggő részhalmazán konstans és nemkorlátos összefüggő halmazon 0.

4.28 Tétel. (Cauchy Formula) *Ha D konvex, $[a, b] \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{C}$, γ zárt és $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor minden $s \in D \setminus \operatorname{ran}(\gamma)$ esetén*

$$n(\gamma, s) f(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - s} dz.$$

Bizonyítás. Legyen $g : D \setminus \{s\} \to \mathbb{C}$,

$$g(z) = \frac{f(z) - f(s)}{z - s}.$$

Ekkor f folytonossága miatt

$$\lim_s g(z)(z - s) = \lim_s \frac{f(z) - f(s)}{z - s}(z - s) = \lim_s f(z) - f(s) = 0$$

Igy g-re teljesül a Cauchy Integráltétel 4.25 általánosítása, így tetszőleges D-beli s-et elkerülő γ zárt görbére

$$\int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(z) - f(s)}{z - s} dz = 0.$$

Ezt átrendezve:

$$\int_\gamma \frac{f(s)}{z - s} dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - s} dz.$$

Kielemve $f(s)$-et az első integrálból és mindkét oldalt szorozva $\frac{1}{2\pi i}$-vel kapjuk a Cauchy Formulát. □

A Cauchy Formula sok esetben alkalmazható konkrét integrálok kiszámítására. Például: ha $f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$ és γ egy origó körüli körvonal paraméterezése, akkor

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{\cos(z)}{z - 0} dz = 2\pi i n(\gamma, 0) \cos(0) = \int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$

A következő tétel szemléletesen azt fejezi ki, hogy egy tartomány pontosan akkor 1-összefüggő, ha a benne haladó görbék nem tudnak megkerülni tartományon kívüli pontot. Bizonyítása igen nehéz, ezért elhagyjuk.

4.29 Tétel. *Egy D tartomány pontosan akkor 1-összefüggő, ha minden D-ben haladó γ zárt görbére és $s \notin D$-re $n(\gamma, s) = 0$.*

A következő tételt sem bizonyítjuk.

4.30 Tétel. (Általános Cauchy Tétel) *Ha $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tetszőleges zárt görbék egy D tartományban, amikre minden $s \notin D$ esetén $\sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, s) = 0$, akkor minden $f \in \mathcal{O}(D)$-re*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = 0.$$

Most már nem csak konvex tartományokra alkalmazhatjuk a 4.23 Cauchy Intergáltételt.

4.31 Következmény. *Ha D 1-összefüggő, $f \in \mathcal{O}(D)$ és γ egy D-beli zárt görbe, akkor $\int_\gamma f = 0$.*

4.32 Következmény. *Ha D 1-összefüggő és $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor f-nek létezik primitív függvénye.*

Bizonyítás. 4.31 és 4.20 Következmény. □

A konkrét példákban teljesen világos, mit értünk azon, hogy két egyszerű zárt görbe azonos vagy ellentétes irányítású. Precízen: γ_1 és γ_2 *azonos irányítású*, ha mindkettőnek ugyanaz az indexe a belső pontjaiban.

4.33 Következmény. *Ha γ_1, γ_2 két azonos irányítású egyszerű zárt görbe, γ_2 a γ_1 belsejében halad, a D tartomány tartalmazza mindkét görbét és a köztük lévő "gyűrűt", akkor minden $f \in \mathcal{O}(D)$-re*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Bizonyítás. Két bizonyítást adunk:

1. Nem triviálisan, de belátható, hogy γ_1 és γ_2 között a "gyűrűben" húzható γ_1 egy-egy pontjától γ_2 egy-egy pontjához két egyszerű, egymástól és a végpontoktól eltekintve γ_1, γ_2-től is diszjunkt μ és ν görbe. μ és ν kezdőpontjai γ_1-et felosztják a γ_{10}, γ_{11} görbékre, végpontjaik γ_2-t felosztják a γ_{20}, γ_{21} görbékre. Ekkor a $\gamma_{10}^\frown \nu^\frown \gamma_{20}^{-\frown} \mu^-$ illetve $\gamma_{11}^\frown \mu^\frown \gamma_{21}^{-\frown} \nu^-$ zárt görbék D egy-egy 1-összefüggő részében haladnak, így a 4.31 Következmény szerint f integrálja rajtuk 0:

$$\int_{\gamma_{10}^\frown \nu^\frown \gamma_{20}^{-\frown} \mu^-} f = \int_{\gamma_{10}} f + \int_\nu f + \int_{\gamma_{20}^-} f + \int_{\mu^-} f = 0,$$

$$\int_{\gamma_{11}^\frown \mu^\frown \gamma_{21}^{-\frown} \nu^-} f = \int_{\gamma_{11}} f + \int_\mu f + \int_{\gamma_{21}^-} f + \int_{\nu^-} f = 0.$$

Ezeket összeadva kapjuk a kívánt egyenlőséget.

2. Ebben a bizonyításban felhasználjuk, az index említett, nem precízen megfogalmazott pontmegkerülést számláló tulajdonságát. A γ_1, γ_2^- görbék kielégítik a 4.30 Általános Cauchy Tétel feltételeit, így $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2^-} f = 0$, vagyis $\int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f = 0$. □

4.34 Következmény. *Ha $\gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ egyszerű azonos irányítású páronként diszjunkt zárt görbék, és $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ a γ belsejében haladnak, továbbá a D tartomány tartalmazza a görbéket és a γ belseje minusz a γ_k-k belsejét ($k = 1, \ldots, n$), akkor minden $f \in \mathcal{O}(D)$-re*

$$\int_\gamma f = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f.$$

Bizonyítás. Most is két bizonyítást adhatunk.

1. A 4.33 Következmény mintájára bizonyítható ez is, azonban az indexelés elég bonyolult lenne rajz nélkül, így elhagyjuk (lásd a gyakorlaton).

2. Most is felhasználjuk az index elfogadott szemléletes jelentését. A γ^- és a $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ görbék kielégítik a 4.30 Tétel feltételeit, így

$$\int_{\gamma^-} f + \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f = 0,$$

vagyis $\int_\gamma f = \sum\limits_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f$. □

Kidolgozott példák

Ebben a részben kiszámolunk egy-két konkrét integrált a korábbi tételek segítségével.

1.) $f(z) = \mathrm{sh}(z) + \frac{1}{(z-i)^3} + i$, $\gamma : [1,2] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \ln(-t^2 + 3t - 1) + \frac{\pi}{t} i$ esetén mivel f-nek létezik primitív függvénye $\mathbb{C} \backslash \{i\}$-n:

$$F(z) = \mathrm{ch}(z) - \frac{1}{2(z-i)^2} + iz,$$

így az integrál csak a végpontoktól függ:

$$\int_\gamma f = \Big(\mathrm{ch}(\gamma(2)) - \frac{1}{2(\gamma(2)-i)^2} + i\gamma(2)\Big) - \Big(\mathrm{ch}(\gamma(1)) - \frac{1}{2(\gamma(1)-i)^2} + i\gamma(1)\Big) =$$

$$\Big(\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2} i\right) - \frac{1}{2(\frac{\pi}{2} i - i)^2} + i\frac{\pi}{2} i\Big) - \Big(\mathrm{ch}(\pi i) - \frac{1}{2(\pi i - i)^2} + i\pi i\Big) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{(\pi-2)^2} - \frac{\pi}{2} - \cos(\pi) - \frac{1}{2(\pi-1)^2} + \pi = \ldots$$

2.) $f(z) = \frac{1}{z} - e^z$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + 2\cos(t) + (3 + \sin(t))i$. Mivel f reguláris a $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^-$ 1-összefüggő tartományon és γ ezen a tartományon belül haladó zárt görbe, ezért a 4.31 Következmény miatt $\int_\gamma f = 0$.

Természetesen, ha egy konvex (vagy általánosabban egy 1-összefüggő) tartományban haladó zárt görbén integrálunk egy reguláris függvényt, akkor persze létezik a függvénynek primitív függvénye, de ezt nem kell meghatároznunk az integrál kiszámításához, hivatkozhatunk a 4.23 Cauchy Integráltételre (vagy általánosan a 4.31 Következményre), vagyis az integrál 0.

3.) $f(z) = \frac{\mathrm{sh}(z^2)+e^{\sin(z)}}{\cos(z)}$, $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 1 + \cos(2t) + (2 + \sin(2t))i$ az $1 + 2i$ körüli 1 sugarú körvonal egy paraméterezése. Mivel cos-nak csak valós gyökei vannak, ezért egy a görbét tartalmazó konvex halmazon, például egy nagyobb körlapon f reguláris, ezért a 4.23 Cauchy Integráltétel miatt $\int_\gamma f = 0$.

4.) $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2+2\cos(t)+i2\sin(t)$ a 2 középpontú 2 sugarú körvonal egy paraméterezése. Ekkor a $g(z) = \frac{z}{z+1}$ függvény reguláris egy a kört tartalmazó konvex halmazon, így a 4.28 Cauchy Formula szerint:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \frac{\frac{z}{z+1}}{z-1} = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-1} = 2\pi i n(\gamma, 1) g(1) = 2\pi i \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \pi i.$$

5.) $f(z) = \frac{i\sin(z^2)+\mathrm{sh}(z^2)}{z^2-2z+2}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2\cos(t) + i2\sin(t)$ a 0 középpontú 2 sugarú körvonal egy paraméterezése. Ekkor $z^2 - 2z + 2 = (z - (1 + i))(z - (1 - i))$ miatt a "problémás" pontok $1 + i$ és $1 - i$ és sajnos mindkettő a körön belül van.

Legyen γ_1 és γ_2 két γ-val azonos irányítású $1+i$-t illetve $1-i$-t megkerülő diszjunkt körvonalak paraméterezései γ belsejében. A 4.34 Következmény szerint ekkor $\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$.

Legyen $g_1(z) = \frac{i\sin(z^2)+\mathrm{sh}(z^2)}{z-(1-i)}$ és $g_2(z) = \frac{i\sin(z^2)+\mathrm{sh}(z^2)}{z-(1+i)}$, ekkor g_i reguláris a γ_i körvonal által meghatározott körlap egy konvex környezetében (egy nagyobb körlapon). A 4.28 Cauchy Formula szerint ekkor

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{i\sin(z^2)+\mathrm{sh}(z^2)}{z-(1-i)}}{z-(1+i)} + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{i\sin(z^2)+\mathrm{sh}(z^2)}{z-(1+i)}}{z-(1-i)} =$$

$$\int_{\gamma_1} \frac{g_1(z)}{z-(1+i)} + \int_{\gamma_2} \frac{g_2(z)}{z-(1-i)} = 2\pi i n(\gamma_1, 1+i) g_1(1+i) + 2\pi i n(\gamma_2, 1-i) g_2(1-i).$$

Alkalmazva az $i\sin(z) = \mathrm{sh}(iz)$ és $\mathrm{sh}(-z) = -\mathrm{sh}(z)$ azonosságokat kapjuk, hogy tovább egyenlő

$$2\pi i \Big(\frac{\mathrm{sh}(i(1+i)^2) + \mathrm{sh}((1+i)^2)}{(1+i)-(1-i)} + \frac{\mathrm{sh}(i(1-i)^2) + \mathrm{sh}((1-i)^2)}{(1-i)-(1+i)} \Big) =$$

$$2\pi i \Big(\frac{\mathrm{sh}(-2) + \mathrm{sh}(2i)}{2i} + \frac{\mathrm{sh}(2) + \mathrm{sh}(-2i)}{-2i} \Big) =$$

$$\pi(\mathrm{sh}(-2) + \mathrm{sh}(2i) - \mathrm{sh}(2) - \mathrm{sh}(-2i)) = 2\pi(\mathrm{sh}(2i) - \mathrm{sh}(2)).$$

Számítsa ki az $\int_\gamma f$ vonalintegrálokat, ahol

4.35 Feladat. γ az $[1 + i, 2 - i, 2 + i]$ töröttvonal egy paraméterezése, $f(z) = 3z^2 + 2z$.

4.36 Feladat. γ a $|z - 2 + i| = 1$ körvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{\mathrm{sh}(z)}{z+i}$.

4.37 Feladat. γ az i körüli $\frac{3}{2}$ sugarú körvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{\sin(z)}{z^2+1}$.

4.38 Feladat. γ az $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$, $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$ és 2 pontokat összekötő háromszögvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{e^{2z}}{z^3-1}$.

4.39 Feladat. γ a $|z+1| = \frac{4}{3}$ körvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$.

4.40 Feladat. γ az 0 középpontú 3 oldalú négyzet határának egy paraméterezése, $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$.

Harmonikus függvények

Egy $D \subseteq \mathbb{C}$ tartományon adott $u : D \to \mathbb{R}$ függvény mikor egy komplex differenciálható függvény valós része? Vagyis milyen u-khoz létezik $v : D \to \mathbb{R}$, hogy $u + iv \in \mathcal{O}(D)$? Ez persze ugyanaz a kérdés, mint hogy milyen v-khez létezik u, hogy $u + iv \in \mathcal{O}(D)$, ugyanis a CR-egyenletek miatt

$$u + iv \in \mathcal{O}(D) \iff -v + iu \in \mathcal{O}(D).$$

4.41 Feladat. Bizonyítsa be ezt az ekvivalenciát, és magyarázza meg, ez miért elég az állításhoz.

Ha u-hoz létezik v, hogy $f = u + iv \in \mathcal{O}(D)$, akkor mivel mint azt később látni fogjuk, f tetszőlegesen sokszor is differenciálható D-n, ezért $f' = u'_x + iv'_x = v'_y + i(-u'_y)$ is differenciálható így a 2.6 Tétel szerint u és v parciális deriváltjai is differenciálhatók, speciálisan léteznek a második parciális deriváltjaik. Persze azt is tudjuk, hogy u és v tetszőlegesen sokszor differenciálható D-n, és ezért akárhanyadrendű parciális deriváltjaik is léteznek és nem függenek a parciális deriválás sorrendjétől (Young Tétel). Ekkor az $f' = u'_x + iv'_x$-re vonatkozó első CR-egyenletből $u''_{xx} = (u'_x)'_x = (v'_x)'_y = v''_{xy}$ és az $f' = v'_y + i(-u'_y)$-re vonatkozó első CR-egyenletből $v''_{yx} = (v'_y)'_x = (-u'_y)'_y = -u''_{yy}$, amiből

$$u''_{xx} + u''_{yy} \equiv 0.$$

Hasonlóan $v''_{xx} + v''_{yy} \equiv 0$. Emlékeztetünk a *Laplace-operátor* definíciójára: ha u (valós értelemben) kétszer differenciálható egy tartományon, vagyis differenciálható és parciális deriváltfüggvényei is differenciálhatók, akkor

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}.$$

4.42 Definíció. *Egy $D \subseteq \mathbb{R}^2$ tartományon adott $u : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény* harmonikus*, ha kielégíti a* $\Delta u \equiv 0$ Laplace-egyenletet.

Az eddigieket összefoglalva kapjuk a következőt.

4.43 Állítás. *Ha $f = u + vi : D \to \mathbb{C}$ és $f \in \mathcal{O}(D)$, akkor u (és persze v is) harmonikus.*

A fordított implikáció nem igaz. Legyen $u : D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy u tetszőlegesen sokszor differenciálható és $\Delta u \equiv 0$, vagyis u harmonikus.

Indirekt tegyük fel, hogy $v : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ és $u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = v(\cos(t), \sin(t))$. Ekkor mivel g differenciálható függvények kompozíciója, ezért differenciálható. Felhasználva a Rolle Tételt és, hogy $g(0) = g(2\pi)$ kapjuk, hogy létezik $\xi \in (0, 2\pi)$, hogy $g'(\xi) = 0$. A többváltozós összetett függvény differenciálására vonatkozó láncszabály alkalmazásával kapjuk, hogy minden $t \in \mathbb{R}$-re

$$g'(t) = (v'_x(\cos(t), \sin(t)), v'_y(\cos(t), \sin(t)))(-\sin(t), \cos(t)),$$

ami a CR-egyenletek szerint tovább egyenlő

$$(-u'_y(\cos(t),\sin(t)),u'_x(\cos(t),\sin(t)))(-\sin(t),\cos(t)) =$$

$$\frac{2\sin^2(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)} + \frac{2\cos^2(t)}{\sin^2(t)+\cos^2(t)} = 2,$$

ellentmondás.

A következő gyenge értelemben a 4.43 Állításban igaz a fordított implikáció.

4.44 Tétel. *Egy $D \subseteq \mathbb{C}$ tartományon adott $u : D \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény pontosan akkor harmonikus, ha D minden pontjának van olyan környezete, amin megadható egy komplex differenciálható függvény, aminek az adott környezetben u a valós része.*

Bizonyítás. Az elégségességet a 4.43 Állításból kapjuk. A szükségességhez azt látjuk be, hogy a $g = u'_x + i(-u'_y)$ függvénynek van primitív függvénye D minden pontjának egy környezetében. A Laplace-egyenlet illetve a Young Tétel szerint

$$u''_{xx} = -u''_{yy} \text{ és } u''_{xy} = u''_{yx} = -(-u''_{yx}),$$

így u'_x és $-u'_y$ kielégítik a CR-egyenleteket D-n, így g reguláris D-n. A 4.24 Következmény szerint ekkor D minden pontjának van olyan környezete, ahol g-nek van primitív függvénye. Egy ilyen környezetben legyen $f_0 = U + iV$ a g egy primitív függvénye: $g = f'_0 = U'_x + i(-U'_y) = u'_x + i(-u'_y)$, így $U'_x = u'_x$ és $-U'_y = -u'_y$, vagyis az U és u differenciálható függvényeknek megegyeznek a parciális deriváltjaik. Tudjuk, hogy ekkor létezik c konstans, amivel $U = u + c$. Ekkor az adott környezetben $f = f_0 - c$ a keresett differenciálható függvény, melynek a valós része u. $\square$

1-összefüggő tartományokon már ekvivalens a két fogalom.

4.45 Tétel. *Egy $D \subseteq \mathbb{C}$ 1-összefüggő tartományon adott $u : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor harmonikus, ha egy D-n értelmezett reguláris függvény valós része.*

Egy harmonikus függvényhez hogyan található meg "képzetes párja" (egy pont környeztében)? Ezt példákkal illusztráljuk. A módszer az egzakt differenciálegyenletek megoldásának lemásolása.

1.) Legyen $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$, $D = \mathbb{C}$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy u tetszőlegesen sokszor differenciálható minden pontban és $\Delta u \equiv 0$, vagyis u harmonikus. A 4.45 Tétel szerint létezik $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, hogy $u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Tudjuk, hogy $v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2$, ezért

$$v(x,y) = \int 3x^2 - 3y^2 dy = 3x^2y - y^3 + c(x).$$

Alkalmazva a $-v'_x(x,y) = u'_y(x,y) = -6xy + 2$ összefüggést, kapjuk hogy

$$-(6xy - 0 + c'(x)) = -6xy + 2.$$

Ebből $c'(x) = -2$, így $c(x) = -2x + c$, vagyis $v(x,y) = 3x^2y - y^3 - 2x + c$.

2.) Legyen $u(x,y) = e^x \cos(y)$, $D = \mathbb{C}$. Ekkor könnyen ellenőrizhető, hogy u tetszőlegesen sokszor differenciálható minden pontban és $\Delta u \equiv 0$, vagyis u harmonikus. A 4.45 Tétel szerint létezik $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, hogy $u + iv \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Tudjuk, hogy $v'_y(x,y) = u'_x(x,y) = e^x \cos(y)$, ezért

$$v(x,y) = \int e^x \cos(y) dy = e^x \sin(y) + c(x).$$

Alkalmazva a $-v'_x(x,y) = u'_y(x,y) = -e^x \sin(y)$ összefüggést, kapjuk hogy

$$-(e^x \sin(y) + c'(x)) = -e^x \sin(y).$$

Ebből $c'(x) = 0$, így $c(x) = c$, vagyis $v(x,y) = e^x \sin(y) + c$.

4.46 Feladat. Bizonyítsa be az ebben a részben szereplő három darab "könnyen ellenőrizhető" állítást.

4.47 Feladat. Határozza meg az $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$ és $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ harmonikus függvények képzetes párját.

4.48 Feladat. Határozza meg a $v(x,y) = 2y(x+1)$ és $v(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ harmonikus függvények valós párját.

5. Hatványsorba fejtés

Taylor-sorok

Belátjuk a Hatványsorok című fejezetben említett tételt komplex függvények hatványsorba fejthetőségéről.

5.1 Tétel. *Ha $z_0 \in \mathbb{C}$ és f reguláris az $S(z_0, R)$ nyílt körlapon, akkor ott előáll*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

hatványsor alakban, ahol ha γ egy z_0 körüli $r < R$ sugarú körvonal (pozitív irányú) paraméterezése, akkor minden n-re

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Bizonyítás. Mivel minden $z \in S(z_0, r)$-ra $n(\gamma, z) = 1$, ezért a 4.28 Cauchy Formula szerint minden ilyen z-re

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ha $|\xi - z_0| = r$ és $z \in S(z_0, r)$, akkor $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| < 1$, így

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Ha $z \in S(z_0, r)$ fix, akkor $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} = q < r$, így

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{r(1 - q)},$$

amiből azt kapjuk, hogy a sor egyenletesen konvergens ξ változójában, hiszen különböző ξ-kre egységesen becsülhető a sor összegének és szeleteinek különbségének abszolút értéke:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| \le$$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{1}{r} \sum_{n=N+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{N+1}}{r(1 - q)}.$$

minden ξ-re. Tehát fix $z \in S(z_0, r)$-re a 4.15 Következmény miatt felcserélhető az integrálás és az összegzés sorrendje:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi\Big)(z-z_0)^n.$$

Ezzel még nem vagyunk készen, hiszen fix r-re az adott előállítást csak az $S(z_0,r)$ körlapra láttuk be. Azonban a hatványsor együtthatóinak 3.1 Tétel szerinti egyértelműsége vagy akár 4.33 Következmény szerint különböző r-ekre az integrálok értéke azonos. □

5.2 Következmény. *Ha $f\in\mathcal{O}(D)$, akkor f tetszőlegesen sokszor differenciálható D-n.*

Bizonyítás. Az 5.1 Tétel szerint D tetszőleges z_0 pontja körül f előáll hatványsor alakban, így a 3.1 Tétel szerint ebben a környezetben f tetszőlegesen sokszor differenciálható. □

Az 5.1 és a 3.1 Tételekből a hatványsor együtthatóinak egyértelműsége miatt speciálisan azt kaptuk, hogy ha az f függvény reguláris egy s pont körüli körlapon és γ egy az s-et (a körlapon belül) pozitív irányban megkerülő kört paraméterez, akkor minden n-re

$$f^{(n)}(s)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-s)^{n+1}}dz.$$

Ez igaz általánosan is:

5.3 Tétel. (Általános Cauchy Formula) *Ha D konvex (1-összefüggő), $f\in\mathcal{O}(D)$ és γ egy D-ben haladó zárt görbe, akkor minden $s\in D\setminus\operatorname{ran}(\gamma)$-re*

$$n(\gamma,s)f^{(n)}(s)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-s)^{n+1}}dz.$$

Ennek a bizonyítása a 5.1 tétel értelemszerű módosításával adódik. Az Általános Cauchy Formula szintén jól alkalmazható integrálok kiszámítására. Például:

Legyen $f(z)=\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}$ és γ a $|z-i|=\frac{3}{2}$ körvonla egy paraméterezése. $z^2+1=(z-i)^2(z+i)^2$ és a körbe csak az i esik a gyökök közül. $f(z)=\frac{g(z)}{(z-i)^2}$, ahol $g(z)=\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}$. $g'(z)=\big(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\big)'=\frac{e^{\pi z}\pi(z+i)^2-e^{\pi z}2(z+i)}{(z+i)^4}=e^{\pi z}\frac{\pi(z+i)-2}{(z+i)^3}$. Az Általános Cauchy Formulával vagy az előtte említett speciális esetével:

$$\int_\gamma f=\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}dz=\frac{2\pi i}{2!}g'(i)=\pi i e^{\pi i}\frac{-2+2\pi i}{-8i}=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi^2}{4}i.$$

Számítsa ki az $\int_\gamma f$ vonalintegrálokat, ahol

5.4 Feladat. γ az 0 körüli 2 sugarú körvonal egy paraméterezése, $f(z)=\frac{\operatorname{sh}(z)}{z^2-2iz-1}$.

5.5 Feladat. γ a $|z-2|=3$ egyenletű kör egy paraméterezése, $f(z)=\frac{e^z}{z^4-z^3}$.

5.6 Feladat. γ a $|z+1|=\frac{3}{2}$ egyenletű körvonal egy paraméterezése, $f(z)=\frac{\cos(z)}{(z^2-z)(z^2-2iz-1)}$.

Laurent-sorok

A hatványsorok általánosításaként kapjuk az úgynevezett *Laurent-sorokat*: ha $z_0 \in \mathbb{C}$ és $a_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$, akkor a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

kifejezést z_0 *körüli Laurent-sornak* nevezük.

Természetesen egy $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ Laurent-sor konvergenciáját egy z pontban úgy értjük, hogy a

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}$$

és a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sor is konvergensek z-ben, összegük a Laurent-sor összege z-ben.

Vizsgáljuk meg, hogy általában egy ilyen alakú sor hol konvergens és összegfüggvénye hol reguláris.

5.7 Tétel. *Adott* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *Laurent-sor esetén, ha*

$$R_1 = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad R_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

akkor a Laurent-sor abszolút konvergens a $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ *nyílt körgyűrű pontjaiban, divergens a zárt körgyűrű komplementerének pontjaiban és a nyílt körgyűrűn összegfüggvénye reguláris. Ha* $R_1 < r_1 \le r_2 < R_2$, *akkor a Laurent-sor egyenletesen konvergens a* $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \le |z-z_0| \le r_2\}$ *zárt körgyűrűn.*

Bizonyítás. Ha $H(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ és $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, akkor

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = H\Big(\frac{1}{z-z_0}\Big) + h(z).$$

A H hatványsor konvergenciasugara:

$$r_H = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_{-n}}} = \frac{1}{R_1}.$$

Tehát H abszolút konvergens az $S\big(0, \frac{1}{R_1}\big)$ nyílt körlapon, divergens a zárt körlap komplementerén és összegfüggvénye reguláris. $\frac{1}{z-z_0} \in S\big(0, \frac{1}{R_1}\big)$ pontosan akkor, ha $\big|\frac{1}{z-z_0}\big| < \frac{1}{R_1}$, vagyis ha $|z-z_0| > R_1$. Tehát a $H\big(\frac{1}{z-z_0}\big)$ függvény abszolút konvergens a $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > R_1\}$ tartományon, divergens $S(z_0, R_1)$-en és összegfüggvénye reguláris (az összetett függvény differenciálhatósága miatt).

A h hatványsor konvergenciasugara:

$$r_h = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{a_n}} = R_2.$$

Tehát h abszolút konvergens az $S(z_0, R_2)$ nyílt körlapon, divergens a zárt körlap komplementerén és összegfüggvénye reguláris.

Ezeket összevetve a Laurent-sor abszolút konvergens a

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R_1\} \cap S(z_0, R_2) = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$$

nyílt körgyűrű pontjaiban, divergens a zárt körgyűrű komplementerének pontjaiban és a nyílt körgyűrűn összegfüggvénye reguláris.

A tétel második fele teljesen hasonlóan bizonyítható. □

Az 5.1 Tétel megfelelője, hogy körgyűrűn reguláris függvény egyértelműen előállítható Laurent-sor összefüggvényeként. Bizonyítása nagyon hasonló, ezért elhagyjuk.

5.8 Tétel. *Ha f reguláris a $z_0 \in \mathbb{C}$ körüli $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ körgyűrűn, akkor ott egyértelműen előáll Laurent-sor összegeként:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

ahol ha γ egy z_0 körüli $R_1 < r < R_2$ sugarú körvonal (pozitív irányú) paraméterezése, akkor minden n-re

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

A Laurent-sor együtthatóinak egyértelműsége miatt ha f reguláris az $S(z_0, R)$ körlapon, akkor ott Taylor-sorának meg kell egyeznie a Laurent-sorával, speciálisan a negatív együtthatóknak 0-nak kell lennie. Ennyit persze könnyen ellenőrizhetünk is: ha $n < 0$ és γ egy z_0 körüli $r < R$ sugarú körvonal paraméterezése, akkor

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \int_\gamma f(z)(z - z_0)^{-n-1} = 0,$$

mivel $f(z)(z - z_0)^{-n-1}$ reguláris $S(z_0, R)$-en ($-n - 1 \geq 0$), így alkalmazható a 4.23 Cauchy Integráltétel.

Szükségünk lesz a komplex L'Hospital Szabályra, melynek kimondása és bizonyítása formálisan sokkal egyszerűbb, mint valós megfelelőjének.

5.9 Tétel. (L'Hospital Szabály) *Legyenek $f, g \in \mathcal{O}(D)$, $a \in D$, $n > 0$ és tegyük fel, hogy minden $k = 0, 1, \ldots, n-1$-re $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ és hogy $g^{(n)}(a) \neq 0$. Ekkor*

$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Bizonyítás. Fejtsük Taylor-sorba f-et és g-t a körül:

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \ldots$$

hasonlóan g-re. Ekkor

$$\lim_a \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_a \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \ldots}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z - a)^{n+1} + \ldots} =$$

$$\lim_a \frac{\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \dots}{\frac{g^{(n)}(a)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(z-a) + \dots}.$$

A számláló és a nevező is egy Taylor-sor melynek konvergenciasugara megegyezik f illetve g konvergenciasugarával, így összegfüggvényük folytonos a körül, tehát a-beli határértékük a függvényértékük: $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ illetve $\frac{g^{(n)}(a)}{n!} \neq 0$. Alkalmazva a hányados limeszére vonatkozó ismereteinket kapjuk a tétel állítását. $\square$

Lássunk egy példát Laurent-sorba fejtésre: Fejtsük Laurent-sorba az $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$ függvényt. Hány Laurent-sorról is van szó? Négyről, ugyanis f reguláris a

$$D_0^b = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-0| < 1\},$$

$$D_0^k = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-0| < \infty\}$$

0 körüli körgyűrűkön, illetve a

$$D_1^b = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\},$$

$$D_1^k = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < \infty\}$$

1 körüli körgyűrűkön. Világos, hogy ez az összes f értelemzési tartományában fekvő maximális nyílt nemkör (nem tartalmazza a középpontját) körgyűrű. Az olyan $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$-beli körgyűrűkön, amik valódi körlapok, vagyis tartalmazzák a középpontjukat a Laurent-sorba fejtés Taylor-sorba fejtéssé egyszerűsödik, vagyis a Laurent-sornak nincsenek negatív kitevőjű tagjai.

D_0^b: $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ és $\frac{1}{z}$ már 0 körüli Laurent-sor. Továbbá ha $|z| < 1$, akkor tudjuk, hogy

$$\frac{1}{z-1} = \frac{-1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

így

$$f(z) = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{-1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} -z^n.$$

D_0^k: Ha $|z| > 1$, akkor $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, így

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{z-1}{z}} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

és

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n,$$

amiből

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{-2} z^n.$$

D_1^b: $f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{z-1}$ és $\frac{1}{z-1}$ már 1 körüli Laurent-sor. Továbbá $|1-z| < 1$ miatt

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,$$

így

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n.$$

D_1^k: Ha $|z-1|>1$, akkor $\left|\frac{1}{z-1}\right|<1$, így

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{\frac{z}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{1}{z-1}}=\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{-1}{z-1}}$$

és

$$\frac{1}{1-\frac{-1}{z-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z-1}\right)^n=\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n(z-1)^n,$$

amiből

$$f(z)=\frac{1}{z-1}\frac{1}{z-1}\sum_{n=-\infty}^{0}(-1)^n(z-1)^n=\sum_{n=-\infty}^{-2}(-1)^n(z-1)^n.$$

Persze vannak sokkal egyszerűbb példák is:

1.) Az $f(z)=\frac{(z+1)^2}{z}$ függvény 0 körüli Laurent-sora:

$$f(z)=\frac{z^2+2z+1}{z}=\frac{1}{z}+2+z.$$

2.) Az $f(z)=e^{\frac{1}{z-i}}$ függvény i körüli Laurent-sora:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z-i}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-i)^n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-n)!}(z-i)^n+1.$$

Fejtse Laurent-sorba a következő függvényeket minden értelmezlési tartományukban lévő maximális nyílt körgyűrűn.

5.10 Feladat. $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$.

5.11 Feladat. $\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$.

5.12 Feladat. $\frac{1-\cos(z)}{z}$.

5.13 Feladat. $\frac{z}{(z^2+1)}$.

5.14 Feladat. $\frac{z}{(z+1)^3}$.

Érdekességek

Ebben a részben egy-két az anyaghoz szervesen nem kapcsolódó, de fontos és önmagában is érdekes tételt bizonyítunk.

5.15 Lemma. *Ha $a\in\mathbb{C}$, $R>0$, f reguláris $S(a,R)$-en és $|f|\le M$, akkor minden $n\in\mathbb{N}$-re*

$$|f^{(n)}(a)|\le\frac{n!M}{R^n}.$$

Bizonyítás. A 5.3 Általános Cauchy Formula szerint, ha γ egy a körüli $r < R$ sugarú körvonal paraméterezése, akkor

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

Az integrál abszolút értékére vonatkozó 4.14 becslés szerint ekkor

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2r\pi = \frac{n!M}{r^n}$$

minden $r < R$-re, amiből már adódik a lemma állítása. $\square$

5.16 Tétel. (Liouville Tétele) *Korlátos egyészfüggvény konstans.*

Bizonyítás. Legyen $|f| \leq M$ az egész síkon. Belátjuk, hogy ekkor $f' \equiv 0$, amiből a 2.14 Tétel szerint már következik, hogy f konstans. A 5.15 Lemma szerint tetszőleges a-ra és $R > 0$-ra $|f'(a)| \leq \frac{M}{R}$, így $f'(a) = 0$ minden a-ra. $\square$

5.17 Tétel. (Algebra Alaptétele) *Minden nem konstans komplex polinomnak van gyöke vagyis, ha $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, $n > 0$ és $a_n \neq 0$, akkor létezik $z_0 \in \mathbb{C}$, hogy $p(z_0) = 0$.*

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges nem konstans p polinomra $\lim\limits_{\infty} p = \infty$. Indirekt tegyük fel, hogy p-nek nincsen gyöke. Legyen $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ egészfüggvény. Ekkor $\lim\limits_{\infty} f = 0$, így létezik $R > 0$, hogy minden z-re, ha $|z| > R$, akkor $|f(z)| < 1$. Azonban f folytonossága miatt f korlátos $B(0, R)$-en, így az egész síkon is. Az előző tétel szerint f konstans, ami abszurdum. $\square$

5.18 Tétel. (Unicitás Tétel) *Legyen $f \in \mathcal{O}(D)$. Ekkor a következők ekvivalensek:*

(a) $f \equiv 0$.

(b) *Létezik egy $z_0 \in D$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re $f^{(n)}(z_0) = 0$.*

(c) *Az $\{z \in D : f(z) = 0\}$ halmaznak van D-ben torlódási pontja.*

Bizonyítás. (a)-ból nyilván következik (b) és (c) is.

(c)⇒(b):Legyen $z_0 \in D$ az f gyökeinek egy torlódási pontja és $R > 0$ olyan, hogy $S(z_0, R) \subseteq D$. f folytonossága miatt $f(z_0) = 0$. Indirekt tegyük fel, hogy létezik egy $n > 0$, hogy $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$, de $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Ekkor f Taylor-sora $S(z_0, R)$-en:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Legyen

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n}.$$

Ekkor g reguláris $S(z_0, R)$-en, $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ és $g(z_0) = a_n \neq 0$. g folytonossága miatt létezik $0 < r < R$, hogy minden $z \in S(z_0, r)$-re $g(z) \neq 0$.

Mivel z_0 az f gyökeinek torlódási pontja, ezért létezik egy $a \in S(z_0, r)$, $a \neq z_0$, hogy $f(a) = 0$, amiből $g(a) = \frac{f(a)}{(a-z_0)^n} = 0$, ellentmondás.

(b)⇒(a): Legyen $A = \{z \in D : \forall\, n \geq 0\ f^{(n)}(z) = 0\}$. Azt fogjuk belátni, hogy A és $D \backslash A$ is nyílt halmazok, amiből D összefüggősége miatt, mivel $A \neq \emptyset$ kapjuk, hogy $D \backslash A = \emptyset$, vagyis $D = A$.

A nyílt: Ha $z_0 \in A$, akkor létezik egy $R > 0$, hogy $S(z_0, R) \subseteq D$. Ezen a körlapon f Taylor-sora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0,$$

így f minden deriváltja is 0 a körlapon, vagyis $S(z_0, R) \subseteq A$.

$D \backslash A$ nyílt: Indirekt tegyük fel, hogy $D \backslash A$ nem nyílt. Ekkor létezik egy $w \in D \backslash A$, hogy minden $\epsilon > 0$-ra $S(w, \epsilon) \nsubseteq D \backslash A$. Legyen $R > 0$ olyan, hogy $S(w, R) \subseteq D$. Ha $0 < \epsilon < R$, akkor ezek szerint $S(w, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, vagyis van egy $a_k \in A$ sorozat, melyre $\lim a_k = w$. Mivel $f^{(n)}$ minden n-re folytonos, ezért minden n-re $0 = \lim f^{(n)}(a_k) = f^{(n)}(w)$, amiből $w \in A$, ellentmondás. □

Az Unicitás Tétel segítségével könnyen bizonyíthatjuk, hogy a valósban megismert trigonometrikus, hiperbolikus stb azonosságok igazak komplexben is. Például $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ bizonyítása: Legyen $f(z) = \sin(2z) - 2\sin(z)\cos(z)$ egészfüggvény. Ekkor f a valós számegyenes pontjaiban 0, vagyis egy az értelemzési tartományában torlódó halmazon 0. Az Unicitás Tétel szerint ekkor $f \equiv 0$, ami pont a kívánt azonosság.

Amikor ilyen típusú azonosságok belátására használjuk az Unicitás Tételt, akkor szokás *Permanencia Elvről* beszélni.

Izolált szingularitások osztályozása

5.19 Definíció. *Adott $f \in \mathcal{O}(D)$ tartományon reguláris függvénynek $z_0 \notin D$* izolált szingularitása*, ha létezik $R > 0$, hogy $S(z_0, R) \backslash \{z_0\} \subseteq D$.*

5.20 Definíció. *Adott $f \in \mathcal{O}(D)$ és $z_0 \notin D$ izolált szingularitása f-nek. Legyen $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ az f függvény z_0 körüli Laurent-sora. Ekkor z_0*

- megszüntethető szingularitása f-nek*, ha minden $n > 0$-ra $a_{-n} = 0$,*
- n-edrendű pólus szingularitása f-nek *($n > 0$), ha $a_{-n} \neq 0$, de minden $m > n$-re $a_{-m} = 0$,*
- lényeges szingularitása f-nek*, ha végtelen sok $n > 0$-ra $a_{-n} \neq 0$.*

Nézzünk egy-két példát.

1.) $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$-nek 0 nem izolált szingularitása, ugyanis 0 tetszőleges környezetében van olyan pont, ahol f nincsen értelmezve.

2.) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$-nek 0 megszüntetehető szingularitása, ugyanis

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

3.) $f(z) = \frac{e^z-1}{z^2}$-nek a 0 pont elsőrendű pólusa, ugyanis

$$\frac{e^z-1}{z^2} = \frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+2)!}.$$

4.) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$-nek 0 lényeges szingularitása, mert $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{1}{(-n)!}z^n + 1$.

5.21 Állítás. *Legyen $f \in \mathcal{O}(D)$, $z_0 \notin D$ izolált szingularitása f-nek és $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ az f függvény z_0 körüli Laurent-sora. Ekkor teljesülnek a következők:*

(a) *z_0 megszüntethető szingularitása f-nek $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z_0} f(z)(z-z_0) = 0$.*

(b1) *z_0 n-edrendű pólusa f-nek $\Longleftrightarrow$*

$$\lim_{z_0}(z-z_0)^{n+1}f(z) = 0, \textit{ de } \lim_{z_0}(z-z_0)^n f(z) \neq 0.$$

(b2) *z_0 pólus szingularitása f-nek $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z_0} f = \infty$.*

(c) *z_0 lényeges szingularitása f-nek $\Longleftrightarrow$ $\nexists \lim\limits_{z_0} f$.*

Vegyük észre, hogy a 5.21 Állítás (a) pontja szerint a Cauchy Integráltétel 4.25 általánosítása nem is volt igazi általánosítás, azonban komoly szerepe volt abban, hogy idáig eljutottunk.

5.22 Feladat. Bizonyítsa be az 5.21 Állítást.

Állapítsa meg a következő függvények izolált szinguláris helyeit és azok típusát.

5.23 Feladat. $\frac{\mathrm{ch}(z)}{z^4}$.

5.24 Feladat. $\frac{1}{(\sin(z)-1)^2}$.

5.25 Feladat. $\frac{1}{z(z-1)^3}$.

5.26 Feladat. $\frac{z}{e^{\frac{1}{z}}-1}$.

A következő tétel egy függvény lényeges szingulatritása körüli viselkedését jellemzi.

5.27 Tétel. (Casorati-Weierstrass Tétel) *Ha z_0 lényeges szingularitása f-nek, akkor minden $w \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$-hez létezik olyan $z_n \to z_0$ ($z_n \neq z_0$) sorozat, melyre $f(z_n) \to w$.*

Bizonyítás. Az állítást elég belátnunk $w \in \mathbb{C}$-re. Indirekt tegyük fel, hogy $w \in \mathbb{C}$, de mégsincsen ilyen sorozat. Ez ekvivalens azzal, hogy létezik $\epsilon, \delta > 0$, hogy minden z-re, ha $0 < |z-z_0| < \delta$, akkor $|f(z)-w| \geq \epsilon$. Ekkor $\lim\limits_{z_0}\frac{f(z)-w}{z-z_0} = \infty$, ezért a 5.21 Állítás szerint $\frac{f(z)-w}{z-z_0}$-nek pólus szingularitása van z_0-ban. Ha ez egy n-edrendű pólus, akkor $\lim\limits_{z_0} \frac{f(z)-w}{z-z_0}(z-z_0)^{n+1} = 0$. Alkalmazva a

$$|f(z)(z-z_0)^n| \leq |(f(z)-w)(z-z_0)^n| + |w(z-z_0)^n|$$

becslést világos, hogy $\lim\limits_{z_0} f(z)(z-z_0)^n = 0$, így f-nek legfeljebb $n-1$-edrendű pólusa van z_0-ban, ellentmondás. □

Ennél sokkal többet állít a következő tétel. Bizonyítása rendkívül nehéz, ezért elhagyjuk.

5.28 Tétel. (Nagy Picard Tétel) *Ha a z_0 pont f-nek lényeges szingularitása, akkor minden $\delta > 0$-ra az $f(S(z_0, \delta))$ képhalmaz legfeljebb egy pont híján megegyezik $\mathbb{C}$-vel.*

A Reziduum Tétel

5.29 Definíció. *Ha z_0 izolált szingularitása f-nek és $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ az f függvény z_0 körüli Laurent-sora, akkor az f* reziduuma *z_0*-ban*:*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = a_{-1}.$$

5.30 Tétel. (Reziduum Tétel) *Legyen D egy tartomány, $z_1, \ldots, z_m \in D$ és $f \in \mathcal{O}(D \backslash \{z_1, \ldots, z_m\})$. Ekkor ha $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ tetszőleges $D \backslash \{z_1, \ldots, z_m\}$-beli zárt görbék, amikre minden $s \notin D$ esetén $\sum\limits_{k=1}^{n} n(\gamma_k, s) = 0$, akkor*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f = 2\pi i \sum_{l=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{n} n(\gamma_k, z_l) \Big) \mathrm{Res}_{z_l} f.$$

A Reziduum Tételnek csak egy (triviális) speciális esetét bizonyítjuk.

5.31 Tétel. (Reziduum Tétel, speciális alak) *Ha γ egy egyszerű zárt görbe a D tartományban, mely tartalmazza γ belsejét, továbbá $z_1, \ldots, z_m$ véges sok pont γ belsejében, akkor minden $f \in \mathcal{O}(D \backslash \{z_1, \ldots, z_m\})$ függvényre*

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{l=1}^{m} \mathrm{Res}_{z_l} f.$$

Bizonyítás. Minden $l = 1, \ldots, m$-re legyen γ_l egy z_l-et megkerülő γ belsejében haladó körvonal γ-val azonos irányítású paraméterezése. Feltehető, hogy a $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ görbék páronként diszjunktak. Ekkor a 4.34 Következmény szerint $\int_\gamma f = \sum\limits_{l=1}^{m} \int_{\gamma_l} f$ és az 5.8 Tétel szerint minden l-re $\int_{\gamma_l} f = \int_{\gamma_l} \frac{f(z)}{(z-z_l)^0} dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z_l} f$. □

A Reziduum Tétel az összes eddigi integráltételünket illetve formulánkat tartalmazza speciális esetként. Konkrét integrálok kiszámítására így a legalkalmasabb eszközünk.

Például legyen $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$ és γ egy $\frac{1}{2}+i$ középpontú 2 sugarú körvonal pozitív irányú paraméterezése. Ekkor

$$\int_\gamma f = 2\pi i(\mathrm{Res}_0 f + \mathrm{Res}_1 f).$$

Felhasználva az f Laurent sorát $S(0,1)\backslash\{0\}$-n és $S(1,1)\backslash\{1\}$-en (f-nek ezeken a körgyűrűkön izolált szingularitása 0 illetve 1) kapjuk, hogy $\int_\gamma f = 2\pi i(-1+1) = 0$. Természetesen ezt az integrált kiszámolhattuk volna a 4.34 Következmény és a Cauchy Formula felhasználásával is, mint a Kidolgozott példák részben az 5.) példa esetében. Vagyis ebben példában nem muszáj alkalmaznunk a Reziduum Tételt. Később látni fogunk olyan példákat is, ahol elkerülhetetlen a Reziduum Tétel alkalmazása.

Általában hogyan határozható meg egy függvény reziduuma izolált szingularitásaiban? Természetesen, ha Laurent-sorba tudjuk fejteni, akkor készen vagyunk. Persze nincs szükségünk a Laurent-sorra a reziduum kiszámításához. Az 5.21 Állítás segítségével el tudjuk dönteni, hogy milyen szingularitása van a függvénynek az adott pontban, ebből pedig nem lényeges szingularitás esetén a következő állítás segítségével kiszámolhatjuk a reziduumot.

5.32 Állítás. *Ha z_0 megszüntetehető szingularitása f-nek, akkor* $\mathrm{Res}_{z_0} f = 0$. *Ha z_0 n-edrendű pólusa f-nek, akkor*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{\lim\limits_{z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]}{(n-1)!}.$$

Bizonyítás. A megszüntethető szingularitásra vonatkozó állítás triviális. Ha f-nek z_0-ban n-edrendű pólusa van, akkor z_0 körül $f(z) = \sum\limits_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, ahol $a_{-n} \neq 0$. Ekkor

$$(z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k+n},$$

amit $n-1$-szer tagonként deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)] = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k(n+k)(n+k-1)\cdots(k+2)(z-z_0)^{k+1}.$$

Vagyis $\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$ a z_0 pont egy pontozott környezetében egy Taylor-sor összegfüggvényével egyenlő, így a határértéke z_0-ban a Taylor-sor 0-adik együtthatója: $a_{-1}(n-1)!$. □

Nézzünk egy-két példát a Reziduum Tétel alkalmazására:

1.) Legyen $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ és γ az 1 sugarú 0 középpontú körvonal egy paraméterezése. A körlapon f-nek 0 izolált szingularitása, ezen kívül mindenhol reguláris. $e^{\frac{1}{z}} = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n)!}z^n + 1$, így $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{-1} \frac{1}{(-n+1)!}z^n + 1 + z$. Tehát $\mathrm{Res}_0 f = \frac{1}{2}$ és a Reziduum Tétel szerint

$$\int_\gamma f = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

2.) Legyen $f(z) = \frac{1}{z(1-e^z)}$ és γ az 1 sugarú 0 középpontú körvonal egy paraméterezése. A körlapon f-nek 0 izolált szingularitása, ezen kívül mindenhol reguláris. A 0 pont másodrendű pólusa f-nek, ugyanis

$$\lim_0 z^2 f(z) = \lim_0 \frac{z}{1-e^z} = -\frac{1}{\exp'(0)} = -1,$$

amiből $\lim\limits_0 z^3 f(z) = 0$ és alkalmazzuk az 5.21 Állítást. Ekkor az 5.32 Állítást felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathrm{Res}_0\, f = \lim_0 \frac{d}{dz}[z^2 f(z)] = \lim_0 \frac{(1-e^z) - z(-e^z)}{(1-e^z)^2} =$$

$$\lim_0 \frac{-e^z + e^z + ze^z}{2(1-e^z)(-e^z)} = \lim_0 \frac{z}{2(e^z-1)} = \lim_0 \frac{1}{2e^z} = \frac{1}{2},$$

ahol a 3. és 5. egyenlőségben felhasználtuk a L'Hospital szabályt. A Reziduum Tétel szerint $\int_\gamma f = 2\pi i \frac{1}{2} = \pi i$.

Határozza meg az $\int_\gamma f$ vonalintegrálokat a Reziduum Tétel segítségével, ahol

5.33 Feladat. γ az i körüli 2 sugarú körvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$.

5.34 Feladat. γ egy egynél nagyobb sugarú 0 középpontú körvonal paraméterezése, $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$.

5.35 Feladat. γ a $|z| = 5$ egyenletű körvonal egy paraméterezése, $f(z) = \frac{z+1}{\sin(iz)}$.

5.36 Feladat. γ egy 0 középpontú körvonal paraméterezése, $f(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

Valós improprius integrálok

Két példával illusztráljuk, hogy a Reziduum Tétel jól alkalmazható valós improprius integrálok meghatározására. Az egyszerűen meggondolható állítások és a könnyebb számolások ellenőrzését az olvasóra hagyjuk.

5.37 Példa. Belátjuk, hogy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Az $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ függvénynek izolált szingularitásai a -1 negyedik gyökei:

$$z_k = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3$. Könnyen meggondolható, hogy ezek mind elsőrendű pólusai f-nek, például:

$$\lim_{z_0} (z - z_0)^2 f(z) = \lim_{z_0} (z - z_0) \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} = 0,$$

és

$$\lim_{z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z_0} \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)} =$$

$$\frac{z_0^2}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \neq 0,$$

így az 5.21 Állítás felhasználásával kapjuk, hogy z_0 elsőrendű pólus.

Az 5.32 Állítás felhasználásával f reziduuma z_0-ban és z_1-ben:

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \lim_{z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

és hasonlóan

$$\mathrm{Res}_{z_1} f = \lim_{z_1}(z-z_1)f(z) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}.$$

Legyen $R > 1$ és γ_R az a görbe, mely az R sugarú felső félsíkba eső félkör határát paraméterezi. A szingularitások közül γ_R belsejébe csak z_0 és z_1 esik, így a Reziduum Tétel szerint

$$\int_{\gamma_R} f = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{Res}_{z_1} f\big) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Az integrált két részre oszthatjuk. Legyen μ_R a $[-R, R]$ szakasz és ν_R a félkör egy paraméterezése. Ekkor $\int_{\gamma_R} f = \int_{\mu_R} f + \int_{\nu_R} f$ és az integrál definíciója szerint

$$\int_{\mu_R} f = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

valós integrál. Ekkor mivel $\frac{x^2}{1+x^4} > 0$, ezért

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \lim_{R\to\infty} \Big(\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \int_{\nu_R} f\Big),$$

vagyis elég belátnunk, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\nu_R} f = 0$.

A félkörön $|1+z^4| \geq R^4 - 1$, amiből $\left|\frac{z^2}{1+z^4}\right| \leq \frac{R^2}{R^4-1}$. Alkalmazzuk az integrál abszolút értékének becslését (4.14 Tétel):

$$\Big|\int_{\nu_R} f\Big| \leq \frac{R^2}{R^4-1} R\pi = \frac{R^3\pi}{R^4-1},$$

ami 0-hoz tart, ha $R \to \infty$.

5.38 Példa. Belátjuk, hogy

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Az $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ függvénynek 0 elsőrendű pólusa. Adott $0 < r < R$ esetén legyen $\gamma_{r,R}$ az r illetve R sugarú 0 középpotnú körök által meghatározott felső fésíkba eső körgyűrűszelet határának paraméterezése. Mivel a γ görbe f értelmezési tartományának egy 1-összefüggő részében halad, ezért a 4.31 Következmény szerint $\int_{\gamma_{r,R}} f = 0$.

Legyen μ_r és ν_R a két félkörvonal természetes paraméterezése negatív illetve pozitív irányban. Ekkor

$$\int_{\gamma_{r,R}} f = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Felhasználva, hogy $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ kapjuk, hogy

$$\int_r^R \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx = \frac{1}{2i}\int_r^R \frac{e^{ix}}{x}dx + \frac{1}{2i}\int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x}dx.$$

ugyanis az $x = -t$ helyettesítéssel $-\int_r^R \frac{e^{-ix}}{x}dx = -\int_{-r}^{-R} \frac{e^{-i(-t)}}{-t}(-1)dt = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t}dt.$

Belátjuk, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$ és $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = -\pi i$. Ebből már következik az állítás:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{r\to 0, R\to\infty} \int_r^R \frac{\sin(x)}{x}dx =$$

$$\lim_{r\to 0, R\to\infty} \frac{1}{2i}\Big(\int_{\gamma_{r,R}} f - \int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big) =$$

$$\lim_{r\to 0, R\to\infty} \frac{1}{2i}\Big(-\int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z}dz - \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

1. $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z}dz = 0$: Ha $z = x + iy$ az R sugarú félkörön van, akkor $\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| = \frac{e^{-y}}{R}$. Legyen $\epsilon > 0$ fix. Vágjuk fel ν_R-et három részre:

$$\nu_R^1 = \nu_R \restriction [0, \epsilon],\ \nu_R^2 = \nu_R \restriction [\epsilon, \pi - \epsilon] \text{ és } \nu_R^3 = \nu_R \restriction [\pi - \epsilon, \pi].$$

A ν_R^1 és ν_R^3 által megadott görbén $\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| \le \frac{1}{R}$, a ν_R^2 által megharározott íven pedig $\left|\frac{e^{iz}}{z}\right| \le \frac{e^{-R\sin(\epsilon)}}{R}$.

Válasszunk egy R_0-t, hogy minden $R > R_0$-ra $e^{-R\sin(\epsilon)} < \frac{\epsilon}{\pi}$ teljesüljön. Ha $R > R_0$, akkor az adott köríveken alkalmazva az integrál abszolút értékének becslését kapjuk, hogy

$$\Big|\int_{\nu_R} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big| \le \Big|\int_{\nu_R^1} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big| + \Big|\int_{\nu_R^2} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big| + \Big|\int_{\nu_R^3} \frac{e^{iz}}{z}dz\Big| \le$$

$$\frac{1}{R}\epsilon R + \frac{e^{-R\sin(\epsilon)}}{R}(\pi - 2\epsilon)R + \frac{1}{R}\epsilon R < 2\epsilon + \pi e^{-R\sin(\epsilon)} < 3\epsilon.$$

2. $\lim\limits_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz = -\pi i$: Az $\frac{e^{iz}-1}{z}$ függvénynek 0-ban megszüntethető szingularitása van, ezért korlátos $S(0,1)$-en, $\left|\frac{e^{iz}-1}{z}\right| \le M$. Ha $r < 1$, akkor $\left|\int_{\mu_r} \frac{e^{iz}-1}{z}dz\right| \le M\pi r$, amiből

$$0 = \lim_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}-1}{z}dz = \lim_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz - \lim_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{1}{z}dz = \lim_{r\to 0} \int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz - (-\pi i),$$

vagyis $\int_{\mu_r} \frac{e^{iz}}{z}dz \to -\pi i$, ha $r \to 0$.

Hasonló módszerekkel beláthatók például a következő integrálok is:

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2}dx = 0,\ \int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^2}dx = -\frac{\pi}{4},\ \int_0^\infty \frac{\cos(x)}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

6. Appendix

Halmazok és függvények

Röviden összefoglaljuk a legfontosabb halmazelméleti fogalmakat.

$\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok, $\mathbb{Z}$ az egész számok és $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát.

Adott A és B halmazok esetén $A \times B$ a két halmaz *Descartes-szorzata*:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ha A, B két halmaz, akkor egy A-n értelmezett B-be képező f függvényt "$f : A \to B$"-vel vagy "$A \xrightarrow{f} B$"-vel jelölünk. f *értelemzési tartománya*: $\mathrm{dom}(f) = A$; f *értékkészlete*:

$$\mathrm{ran}(f) = \{b \in B : \exists\ a \in A\ f(a) = b\}.$$

Egy $f : A \to B$ függvény *konstans*, ha létezik egy $b \in B$, hogy minden $a \in A$-ra $f(a) = b$, jelölésben $f \equiv b$.

Ha $f : A \to B$ egy függvény és $X \subseteq A$, akkor legyen $f(X)$ az X halmaz *képe* (f-nél), vagyis

$$f(X) = \{b \in B : \exists\ x \in X\ f(x) = b\}.$$

Ha $f : A \to B$ egy függvény és $A' \subseteq A$, akkor f-et megszoríthatjuk A'-re és kapjuk az

$$f \restriction A' : A' \to B$$

függvényt, vagyis minden $a \in A'$-re $(f \restriction A')(a) = f(a)$.

Egy $f : A \to B$ függvény

- *injektív*, ha különböző A-beli elemeket f különböző B-beli elemekbe képez, vagyis

$$\forall\ a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2));$$

- *szürjektív*, ha minden B-beli elem előáll egy A-beli elem képeként, azaz $\mathrm{ran}(f) = B$, vagyis

$$\forall\ b \in B\ \exists\ a \in A\ f(a) = b;$$

- *bijektív*, ha injektív és szürjektív, vagyis oda-vissza egyértelmű (összepárosítja A és B elemeit).

Egy $f : A \to B$ injektív függvénynek képezhetjük az *inverzét*:

$$f^{-1} : \mathrm{ran}(f) \to A,$$

ha $b \in \mathrm{ran}(f)$, akkor $f^{-1}(b)$ az az egyértelműen létező $a \in A$, melyre $f(a) = b$, másképpen $f^{-1}(f(a)) = a$.

Ha $g : A \to B$ és $f : B \to C$, akkor az f és g függvények *kompozíciója*:

$$f \circ g : A \to C,\ (f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Testek

Ha egy T nemüres halmazon adott két darab kétváltozós művelet: $\oplus$ és $\odot$, továbbá ki van jelölve a halmaz két különböző eleme $n, e \in T$, akkor a $\langle T, \oplus, \odot, n, e\rangle$ struktúra egy *test*, ha teljesülnek a következők:

I. Az összeadás tulajdonságai

(a) $\forall\ a, b \in T\ a \oplus b = b \oplus a$ (az összeadás *kommutatív*),

(b) $\forall\ a, b, c \in T\ a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ (az összeadás *asszociatív*),

(c) $a \oplus n = a$ (n egy *nullelem*),

(d) $\forall\ a \in T\ \exists\ b \in T\ a \oplus b = n$ (létezik *ellentett*).

II. A szorzás tulajdonságai

(a) $\forall\ a, b \in T\ a \odot b = b \odot a$ (az szorzás *kommutatív*),

(b) $\forall\ a, b, c \in T\ a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ (az szorzás *asszociatív*),

(c) $a \odot e = a$ (e egy *egységelem*),

(d) $\forall\ a \in T \backslash \{n\}\ \exists\ b \in T\ a \odot b = e$ (létezik *inverz*).

III. A kettő kapcsolata, *disztributivitás*:

$$\forall\ a, b, c \in T\ a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Például a valós számok a szokásos összeadással és szorzással, továbbá a 0 és 1 elemekkel egy test:

$$\langle \mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle.$$

Teljesen hasonlóan a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza is testet alkot a szokásos műveletekkel. Más példák:

1.) A két elemű test: Legyen $\{n, e\}$ egy tetszőleges kételemű halmaz a műveletek pedig: $n \oplus n = e \oplus e = n$, $n \oplus e = e \oplus n = e$, $n \odot n = n \odot e = e \odot n = n$ és $e \odot e = e$.

2.) A $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ test: A $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmazon a szokásos műveletekkel egy testet kapunk.

6.1 Tétel. *Az* Emlékeztető*-ben definiált műveletekkel* $\mathbb{C}$ *egy test:*

$$\langle \mathbb{C}, +, \cdot, (0, 0), (1, 0)\rangle.$$

Bizonyítás. A összeadás tulajdonságai egyszerűen abból következnek, hogy a vektorösszeadásnak megvannak ezek a tulajdonságai.

A szorzás tulajdonságai:

(a): $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$ és $(a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1) = (a_2a_1 - b_2b_1, a_2b_1 + b_2a_1)$, így $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_2, b_2) \cdot (a_1, b_1)$.

(b): $(a_1, b_1) \cdot ((a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)) = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + b_2a_3) = (a_1(a_2a_3 - b_2b_3) - b_1(a_2b_3 + b_2a_3), a_1(a_2b_3 + b_2a_3) + b_1(a_2a_3 - b_2b_3)) =$

$$(a_1a_2a_3 - a_1b_2b_3 - b_1a_2b_3 - b_1b_2a_3, a_1a_2b_3 + a_1b_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1b_2b_3).$$

Továbbá $((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))\cdot(a_3,b_3) = (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)\cdot(a_3,b_3) = ((a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+b_1a_2)b_3, (a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+b_1a_2)a_3) =$

$$(a_1a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3, a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+b_1a_2a_3).$$

(c): $(a,b)\cdot(1,0) = (a1-b0, a0+b1) = (a,b)$.

(d): Ha $(a,b)\neq(0,0)$, akkor

$$(a,b)\cdot\Big(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\Big) = \Big(\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\Big) = (1,0).$$

Disztributivitás:

$$(a_1,b_1)\cdot((a_2,b_2)+(a_3,b_3)) = (a_1,b_1)\cdot(a_2+a_3,b_2+b_3) =$$
$$(a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3, a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3) =$$
$$(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+b_1a_2)+(a_1a_3-b_1b_3, a_1b_3+b_1a_3) =$$
$$((a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2))+((a_1,b_1)\cdot(a_3,b_3)).$$

□

Az $\{(a,0) : a\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{C}$ halmaz tartalmazza a kijelölt $(0,0)$ és $(1,0)$ elemeket és minden $a,a'\in\mathbb{R}$-re

$$(a,0)+(a',0) = (a+a',0) \text{ és } (a,0)\cdot(a',0) = (aa',0),$$

vagyis a halmaz zárt a műveletekre.

Az ilyen részstruktúrát *résztestnek* nevezzük. Például $\mathbb{Q}$ részteste $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nek és mindkettő részteste a valós számok testének.

Ez a részteste $\mathbb{C}$-nek *izomorf* a valós számok testével. Precízen, ha

$$\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{C},\ \varphi(a) = (a,0),$$

akkor minden $a,a'\in\mathbb{R}$-re $\varphi(a+a') = \varphi(a)+\varphi(a')$ és $\varphi(aa') = \varphi(a)\cdot\varphi(a')$, vagyis φ *művelettartó*. Ez az izomorfizmus az oka az egyszerűsítésünknek, vagy megfeleltetésünknek, amikor azt mondjuk, hogy $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$, hiszen $(a,0)$ helyett félreértések nélkül irhatunk a-t.

$\mathbb{R}^2$ topológiája

Röviden összefoglaljuk a legszükségesebb topológia alapfogalmakat.

6.2 Definíció. *Egy* $\underline{a} = (x,y)\in\mathbb{R}^2$ *vektor* hossza *vagy* normája*:*

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

6.3 Tétel. *A* $\|.\| : \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *norma minden* $\lambda\in\mathbb{R}$ *és* $\underline{a},\underline{b}\in\mathbb{R}^2$ *esetén eleget tesz a következőknek:*

0.) $\|\underline{a}\|\geq 0$, $\|\underline{a}\| = 0 \iff \underline{a} = \underline{0} = (0,0)$,

1.) $\|\lambda\underline{a}\| = |\lambda|\|\underline{a}\|$,

2.) $\|\underline{a}+\underline{b}\|\leq\|\underline{a}\|+\|\underline{b}\|$ (*háromszög-egyenlőtlenség*).

6.4 Definíció. *Adott* $\underline{a} = (x_1, y_1)$ *és* $\underline{b} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *pontok* távolsága*:*

$$d(\underline{a}, \underline{b}) = \|\underline{a} - \underline{b}\| = \sqrt{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)^2}.$$

Speciálisan egy $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ pont normája egyenlő a $\underline{0}$-tól való távolságával.

6.5 Tétel. *A* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *távolságfüggvény minden* $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \in \mathbb{R}^2$ *esetén kielégíti a következő azonosságokat:*

d0) $d(\underline{a}, \underline{b}) \geq 0$, $d(\underline{a}, \underline{b}) = 0 \iff \underline{a} = \underline{b}$,

d1) $d(\underline{a}, \underline{b}) = d(\underline{b}, \underline{a})$,

d2) $d(\underline{a}, \underline{c}) \leq d(\underline{a}, \underline{b}) + d(\underline{b}, \underline{c})$. *(háromszög-egyenlőtlenség)*

6.6 Definíció. *Adott* $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ *és* $\epsilon > 0$ *esetén az* $\underline{a}$ pont körüli ϵ sugarú nyílt körlap*:*

$$S(\underline{a}, \epsilon) = \{\underline{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{a}, \underline{p}) < \epsilon\},$$

az $\underline{a}$ pont körüli ϵ sugarú zárt körlap*:*

$$B(\underline{a}, \epsilon) = \{\underline{p} \in \mathbb{R}^2 : d(\underline{a}, \underline{p}) \leq \epsilon\}.$$

6.7 Definíció. *Egy* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *halmaz* nyílt*, ha minden* $\underline{a} \in U$*-hoz létezik* $\epsilon > 0$*, amire* $S(\underline{a}, \epsilon) \subseteq U$*.*

Speciálisan $\emptyset$ és $\mathbb{R}^2$ nyílt halmazok.

6.8 Állítás. *Minden* $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$*-re és* $\epsilon > 0$*-ra az* $S(\underline{a}, \epsilon)$ *halmaz nyílt.*

A nyíltság definíciója szerint minden nyílt halmaz előáll nyílt körlapok uniójaként.

6.9 Állítás. *Tetszőlegesen sok nyílt halmaz uniója nyílt. Véges sok nyílt halmaz metszet nyílt.*

Az állítás végtelen sok nyílt halmaz metszetére nem igaz: $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S\Big(\underline{a}, \frac{1}{n}\Big) = \{\underline{a}\}$.

6.10 Definíció. *Egy* $H \subseteq \mathbb{R}^2$ *halmaznak egy* $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ torlódási pontja*, ha minden* $\epsilon > 0$*-ra az* $S(\underline{a}, \epsilon) \cap H$ *halmaz végtelen. A* H *halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje* H'*.*

6.11 Definíció. *Egy* $F \subseteq \mathbb{R}^2$ *halmaz* zárt*, ha minden torlódási pontját tartalmazza, vagyis* $F' \subseteq F$*.*

6.12 Állítás. *Egy* $F \subseteq \mathbb{R}^2$ *halmaz pontosan akkor zárt, ha az* $\mathbb{R}^2 \backslash F$ *halmaz nyílt.*

Tárgymutató