Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 1. gyakorlat

1. Félcsoport, csoport, vagy egyik sem? Ha félcsoport, akkor van-e benne baloldali/jobboldali egységelem? Kommutativ-e a művelet?

(a) $(\mathbb{R}^n, +)$ ahol $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ a szokásos vektor összeadás;

(b) $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ahol $\langle\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle$ a szokásos skaláris szorzás;

(c) $(\mathbb{R}^3, \times)$ ahol $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a szokásos vektoriális szorzás;

(d) $(\mathcal{P}(A), \cup)$;

(e) $(\mathcal{P}(A), \cap)$;

(f) $(\mathcal{P}(A), \setminus)$;

(g) $(\mathcal{P}(A), \triangle)$ ahol $\triangle$ a *szimmetrikus differencia:* $X \triangle Y = (X\setminus Y) \cup (Y\setminus X)$;

(h) $(X^2, \odot)$ ahol $X \neq \emptyset$ és $(x, y) \odot (v, z) = (x, z)$;

(i) $(X, \boxdot)$ ahol $X \neq \emptyset$ és $x \boxdot y = y$;

(j) $(X^X, \circ)$ ahol X^X az $X \to X$ függvények halmaza, $\circ$ pedig a kompozíció;

(k) $(\mathbb{Z}, \odot)$ ahol $n \odot m = n + m - nm$.

2. Legyen $(S, \cdot)$ egységelemes félcsoport.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha $a, b \in S$ invertálható, akkor ab és ba is invertálható.

(b) Bizonyítsd be, hogy ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.

3. Legyen $(R, +, \cdot)$ egy gyűrű, 0 a nullelem. Bizonyítsd be a következőket:

(a) Minden $a \in R$-re $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

(b) Minden $a, b \in R$-re $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

(c) Ha R (ferde)test, akkor nullosztómentes, vagyis

$$\forall\, a, b \in R \ \big(a \cdot b = 0 \Longrightarrow (a = 0 \text{ vagy } b = 0)\big).$$

(d*) Ha R rendezett gyűrű (vagyis adott R-en egy $<$ lineáris rendezés (irreflexív, tranzitív, és trichotóm reláció), melyre minden $a, b, c \in R$ esetén $a < b \Rightarrow a + c < b + c$, és ha $c > 0$, akkor $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$), akkor R nullosztómentes.

4. Bizonyítsd be, hogy ha $T \subseteq \mathbb{R}$ és T test $\mathbb{R}$ műveleteivel, akkor $\mathbb{Q} \subseteq T$.

5. Bizonyítsd be, hogy az $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz testet alkot a valós számok szokásos műveleteivel. Mutasd meg, hogy $\sqrt{3}$ nem eleme ennek a halmaznak.

6. Bizonyítsd be, hogy ha p prím, akkor a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaz egy test a *modulo* p végzett összeadással és szorzással.

HF 1. Legyen $k \leq n \in \mathbb{N}$. Mutass példát olyan n elemű félcsoportra, amiben pontosan k darab baloldali egységelem van.

HF 2. Bizonyítsd be, hogy az $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ halmaz nem test a valós számok műveleteivel.