# Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 11. gyakorlat

**1.** Oldd meg az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszereket, ahol

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**2.** Hány megoldása van az $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek a $p \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}?$$

**3.** Határozd meg az alábbi mátrixok determinánsát:

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 2+i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}.$$

**4.** Add meg a következő mátrixok valós és komplex sajátértékeit és hozzájuk tartozó sajátvektorait. Dönts el hogy van-e olyan bázis, amiben a mátrix(hoz tartozó lineáris leképezés mátrixa) diagonális alakú. Ha van ilyen, adj meg egy ilyen bázist. Az (a) és (b) esetében oldd meg a feladatot a karakterisztikus polinom meghatározása nélkül is.

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(d) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**5.** Határozd meg a következő lineáris leképezések sajátértékeit és sajátvektorait a mátrixuk felírása nélkül és dönts el, hogy diagonalizálhatók-e.

(a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1, 0, -1)$ vektorra merőleges origón átmenő síkra;

(b) $\mathbb{R}^3$ $120°$-os elforgatása az $x = y = -z$ egyenes körül;

(c) az $(1, 0, 2)$ vetorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ön.

**6.** Igaz-e, hogy

(a) ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is?

(b) ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is?

(c) 0 pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\mathbf{A}^2$-nek?

**7.** Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét képlettel és elemi sorműveletek segítségével is:

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**HF 1.** Oldd meg az $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

**HF 2.** Határozd meg az alábbi mátrix és lineáris leképezés valós sajátértékeit és sajátvektorait:

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -6 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbb{R}^3$ merőleges vetítése az $x = 3y = z$ egyenesre.

**HF 3.** Adj meg olyan $4\times4$-es valós mátrixot, melynek nincsen valós sajátértéke, de a komplex sajátértékek "könnyen" leolvashatók.

**HF 4.** Oldd meg az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixegyenletet (vagyis add meg azon $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrixokat amikre igaz az egyenlőség).

## Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 11. gyakorlat

**1.** Oldd meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszereket, ahol

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{(c) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & -5 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

**2.** Hány megoldása van az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek a $p \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & p & 0 \\ 0 & 1 & p \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}?$$

**3.** Határozd meg az alábbi mátrixok determinánsát:

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 0 & i & -1 \\ -i & 2+i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & \dots & \\ 3 & 3 & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{bmatrix}.$$

**4.** Add meg a következő mátrixok valós és komplex sajátértékeit és hozzájuk tartozó sajátvektorait. Dönts el hogy van-e olyan bázis, amiben a mátrix(hoz tartozó lineáris leképezés mátrixa) diagonális alakú. Ha van ilyen, adj meg egy ilyen bázist. Az (a) és (b) esetében oldd meg a feladatot a karakterisztikus polinom meghatározása nélkül is.

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(d) } \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

**5.** Határozd meg a következő lineáris leképezések sajátértékeit és sajátvektorait a mátrixuk felírása nélkül és dönts el, hogy diagonalizálhatók-e.

(a) $\mathbb{R}^3$ tükrözése az $(1, 0, -1)$ vektorra merőleges origón átmenő síkra;

(b) $\mathbb{R}^3$ $120°$-os elforgatása az $x = y = -z$ egyenes körül;

(c) az $(1, 0, 2)$ vetorral való vektoriális szorzás $\mathbb{R}^3$-ön.

**6.** Igaz-e, hogy

(a) ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek is?

(b) ha $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}^2$-nek, akkor $\mathbf{v}$ sajátvektora $\mathbf{A}$-nak is?

(c) 0 pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A}$-nak, ha $\mathbf{A}^2$-nek?

**7.** Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét képlettel és elemi sorműveletek segítségével is:

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c) } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

**HF 1.** Oldd meg az $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ egyenletrendszert a Cramer-szabály segítségével.

**HF 2.** Határozd meg az alábbi mátrix és lineáris leképezés valós sajátértékeit és sajátvektorait:

(a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \\ -6 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbb{R}^3$ merőleges vetítése az $x = 3y = z$ egyenesre.

**HF 3.** Adj meg olyan $4 \times 4$-es valós mátrixot, melynek nincsen valós sajátértéke, de a komplex sajátértékek "könnyen" leolvashatók.

**HF 4.** Oldd meg az $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ mátrixegyenletet (vagyis add meg azon $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mátrixokat amikre igaz az egyenlőség).