Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 2. gyakorlat

1. Végezd el a következő műveleteket:

$$\text{(a) } (3-i)(1+3i);\quad \text{(b) } \frac{3-2i}{2+5i};\quad \text{(c) } i^{1234};\quad \text{(d) } |2z-zu| \text{ ahol } z=1+3i,\ u=2-i.$$

2. Mi a geometriai jelentése az alábbi $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ leképezéseknek:

$$\text{(a) } z\mapsto iz;\quad \text{(b) } z\mapsto \overline{z},\quad \text{(c) } z\mapsto \frac{z}{i}?$$

3. Hozd trigonometrikus alakra a következő komplex számokat:

$$\text{(a) } 1-i;\quad \text{(b) } -8;\quad \text{(c) } 3i;\quad \text{(d) } -3\sqrt{3}-3i;\quad \text{(e) } \sin\frac{\pi}{7}-i\cos\frac{\pi}{7}.$$

4. Ábrázold az alábbi halmazokat a komplex síkon:

(a) $|3z+5-2i|\le 6$; (b) $z+\overline{z}\ge -1$; (c) $|z-2i|=|z+i|$; (d) $|z|=iz$; (e) $\mathrm{Re}\big(\frac{z-1}{z+1}\big)=0$.

5. Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

$$\text{(a) } z^2=-12;\quad \text{(b) } z^2+3z+4=0;\quad \text{(c) } z^2+2iz-1+i=0.$$

Legyen R egy gyűrű a $+$ és $\cdot$ műveletekkel és $0\in R$ nullelemmel. Ekkor $(R,\le)$ *rendezett gyűrű*, ha $\le$ egy *lineáris rendezés* R*-n*, vagyis

(LR1) $\le$ *reflexív*: $\forall\, a\in R\ a\le a$;

(LR2) $\le$ *antiszimmetrikus*: $\forall\, a,b\in R\ \big((a\le b \text{ és } b\le a)\Longrightarrow a=b\big)$;

(LR3) $\le$ *tranzitív*: $\forall\, a,b,c\in R\ \big((a\le b \text{ és } b\le c)\Longrightarrow a\le c\big)$;

(LR4) $\le$ *trichotóm*: Minden $a,b\in R$ ($a\le b$ vagy $b\le a$);

továbbá teljesülnek a következők ($\ge$, $<$ és $>$ jelentése értelemszerű):

(MON1) $\forall\, a,b,c\in R\ (a\le b\Longrightarrow a+c\le b+c)$;

(MON2) $\forall\, a,b,c\in R\ \big((a\le b \text{ és } 0<c)\Longrightarrow (ac\le bc \text{ és } ca\le cb)\big)$.

Egy R gyűrű *rendezhető*, ha létezik olyan $\le$ lineáris rendezés R-en, mellyel $(R,\le)$ rendezett gyűrű.

6. Legyen $(R,\le)$ egy rendezett gyűrű. Bizonyítsd be a következőket:

(a) Ha R nullosztómentes (például test), akkor (MON2) ekvivalens a következővel:

(MON2') $\forall\, a,b,c\in R\ \big((a<b \text{ és } 0<c)\Longrightarrow (ac<bc \text{ és } ca<cb)\big)$.

(b) Ha $a,b,c\in R$, $a\le b$ és $c<0$, akkor $ac\ge bc$ és $ca\ge cb$.

(c) Ha $a\ge 0$ és $-a\ge 0$, akkor $a=0$.

(d) Ha $a\ge 0$ és $b\ge 0$, akkor $a+b\ge 0$.

(e) Ha $a\ge 0$ és $b\ge 0$, akkor $ab\ge 0$.

7. Mutasd meg, hogy $\mathbb{C}$ nem rendezhető.

8. Bizonyítsd be, hogy ha egy T testben léteznek $a_1,a_2,\dots,a_n$ elemek, melyekre $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2=-1$, akkor T nem rendezhető. Mejegyezzük, hogy az állítás visszafelé is igaz, de a másik irány bizonyítása komolyabb eszközöket igényel.

HF 1. Határozd meg az alábbi összegeket:

$$\text{(a) } \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n} \text{ (0.2 pont)};\quad \text{(b) } \binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n} \text{ (0.3 pont)};$$

$$\text{(c) } \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\dots \text{ (0.5 pont)}.$$

HF 2. Mutasd meg, hogy ha $(\mathbb{Q},\le)$ rendezett test, akkor $\le$ csak a szokásos rendezés lehet (1 pont).