Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 3. gyakorlat

1. Add meg trigonometrikus alakban $\frac{(1+i)^{31}}{(-1+\sqrt{3}i)^{17}}$-et.

2. Oldd meg a $2z^4+1-\sqrt{3}i=0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

3. Mennyi az n. egységgyökök szorzata?

4.* Mennyi a primitív n. egységgyökök összege illetve szorzata?

5. Legyenek $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ független vektorok. Függetlenek-e a következő rendszerek?

(a) $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

(b) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$.

(c) $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{c}+\mathbf{a}$.

(d) $\mathbf{a}-2\mathbf{b}$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$.

(e) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+2\mathbf{c}$, $\mathbf{c}-3\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

6. Legyenek $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ tetszőleges vektorok. A skaláris szorzat segítségével fejezd ki $\mathbf{b}$-nek az $\mathbf{a}$ által kifeszített egyenesre merőleges vetületét.

7. Határozd meg az $(1,0,-2)$ és $(1,1,3)$ vektorok szögét.

Adott $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3),\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ vektorok *vektoriális szorzata*:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)\in\mathbb{R}^3.$$

8. Mutasd meg, hogy minden $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ és $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén igazak a következők:

(a) $\mathbf{a}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ és $\mathbf{b}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}$;

(b) $(\alpha\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times(\alpha\mathbf{b})$;

(c) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ és hasonlóan a második koordinatában is;

(d) $\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.

9. Bizonyítsd be, hogy az $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^3$ vektorok által kifeszített paralellepipedon térfogata $|\mathbf{abc}|$, ahol $\mathbf{abc}$ a vegyesszorzatot jelöli, vagyis $\mathbf{abc}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$. A **HF 2.** eredménye felhasználható.

HF 1. Legyenek $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^3$ és tegyük fel hogy $|\mathbf{a}|=1$, $|\mathbf{b}|=3$, továbbá hogy $|\mathbf{a}+2\mathbf{b}|=3$. Határozd meg $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ szögét.

HF 2. Mutasd meg elemi eszközökkel, hogy $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\sphericalangle(\mathbf{a},\mathbf{b})$.