Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 4. gyakorlat

1. Oszd el maradékosan az $x^5 - 3x^4 + 2x + 1$ polinomot a következő polinomokkal:

$$\text{(a) } x^2 + 2x - 3; \quad \text{(b) } x - 2; \quad \text{(c) } x^2 - 4.$$

2. Számítsd ki az $f(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - x + 2$ és a $g(x) = x^4 + 2x^2 + x + 2$ polinomok legnagyobb közös osztóját, jelölje ezt $d(x)$. Adj meg olyan $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomokat, melyekre $f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x)$.

3. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

(a) Ha $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $f(x) \mid_{\mathbb{R}[x]} g(x)$, akkor $f(x) \mid_{\mathbb{Q}[x]} g(x)$.

(b) Ha $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(x) \mid_{\mathbb{Q}[x]} g(x)$, akkor $f(x) \mid_{\mathbb{Z}[x]} g(x)$.

4. Legyen K egy tetszőleges test.

(a) Bizonyítsd be, hogy ha egy $f(x) \in K[x]$ legfeljebb 3-adfokú polinomnak nincsen gyöke K-ban, akkor irreducibilis.

(b) Mutass példát olyan $\mathbb{Z}[x]$-beli 3-adfokú polinomra, melynek nincsen gyöke $\mathbb{Z}$-ben, de nem irreducibilis. (Vagyis (a) általában nem igaz még kommutatív, egységelemes, nullosztómentes gyűrű felett sem.)

(c) Mutass példát olyan $\mathbb{R}[x]$-beli 4-edfokú polinomra, melynek nincsen gyöke $\mathbb{R}$-ben, de nem irreducibilis. (Vagyis (a) nem igaz 4-edfokú polinomokra $K = \mathbb{R}$ felett.)

5. Bontsd fel a $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben és $\mathbb{Q}[x]$-ben.

6. Add meg a következő polinomok gyöktényezős alakját:

$$\text{(a) } x^3 - 1; \quad \text{(b) } x^4 + 1, \quad \text{(c) } x^n - 1; \quad \text{(d) } x^n + 1;$$

$$\text{(e) } x^6 - x^4 + 2; \quad \text{(f) } x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

7. Tegyük fel, hogy $f(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ továbbá hogy $f(x)g(x) = h(x)$. Igaz-e, hogy ekkor $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$? És ha f főegyütthatója 1?

8. Mutass példát olyan $f(x)$ racionális, de nem egész együtthatós polinomra, mely minden egész helyen egészet vesz fel.

9. Bizonyítsd be, hogy nincsen olyan nem konstans $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, mely valamikortól kezdve mindig prímszámot vesz fel, vagyis valamely $N \in \mathbb{N}$-től kezdve minden $n \geq N$ esetén $f(n)$ prím.

HF 1. Bontsd fel $\mathbb{C}$ fölött elsőfokú tényezők szorzatára a $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$ polinomot (0.5 pont).

HF 2. Add meg az összes másodfokú irreducibilis polinomot $\mathbb{Z}_3$ fölött (1 pont).