

Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 6. gyakorlat

1. Válaszd ki \mathbb{R}^3 egy bázisát az $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $3\mathbf{k}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ vektorokból és a negyediket írd fel a bázis elemeinek lineáris kombinációjaként.

2. Mutasd meg, hogy ha a $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vektorok közül csak \mathbf{v}_1 állítható elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$.

3. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ egy független rendszer, de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5\}$ és $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ összefüggők és $\mathbf{v}_5 \neq \mathbf{0}$. Mutasd meg, hogy ekkor $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ független.

4. Mennyi az összes olyan $k \times n$ -es mátrix összege, melyben csak 0 és 1 fordul elő.

5. Melyek alkotnak vektorteret \mathbb{R} felett? Amelyek igen, azok hány dimenziósak?

(a) 4×4 felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;

(b) invertálható 2×2 -es valós mátrixok a szokásos műveletekkel;

(c) \mathbb{R}^2 az $(a, b) \oplus (c, d) = (a + d, b + c)$ összeadással és a szokásos skalárral szorzással;

(d) \mathbb{C} a szokásos összeadással és valós skalárral szorzással;

(e) azon legfeljebb 4-edfokú $\mathbb{R}[x]$ beli polinomok, melyeknek gyöke a 3 a szokásos műveletekkel;

(f) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - b + 3c = d\}$ a szokásos műveletekkel;

(g) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b^2 - 1 = c + d\}$ a szokásos műveletekkel.

HF 1. Legyen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ egy független rendszer \mathbb{R}^3 -ben. Határozd meg azon \mathbf{a} vektorokat, melyekre $\{\mathbf{v}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{v}_2 + \mathbf{a}, \mathbf{v}_3 + \mathbf{a}\}$ is független.

HF 2. Melyik vektortér \mathbb{R} felett a szokásos műveletekkel? (mind 0.25 pont)

(a) A $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvények halmaza.

(b) A $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ függvények halmaza.

(c) A $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények halmaza.

(d) Az $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f(1) = 2\}$ halmaz.