Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) 7. gyakorlat

1. Határozd meg az alábbi vektorrendszerek rangját:

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}\qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-4\end{pmatrix}$$

2. Lineárisak-e az alábbi leképezések? Ha igen, akkor határozd meg a magterüket és a képterüket, és azok egy-egy bázisát.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y - z)$ ($\mathbb{R}$ felett);

(b) $\alpha : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}$, $\alpha(p) = p(-1)$ ($\mathbb{R}$ felett);

(c) $\beta : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^4$, $\beta(a, b, c, d) = (a - b, 0, c + d, d)$ ($\mathbb{Z}_3$ felett);

(d) $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\delta(z) = \overline{z}$ ($\mathbb{C}$ felett);

(e) $\xi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\xi(z) = \overline{z}$ ($\mathbb{R}$ felett);

(f) $\zeta : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$, $\zeta(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_1$ ($\mathbb{R}$ felett);

(g) $\kappa : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^2$, $\kappa(p) = (2, 0)$ ($\mathbb{R}$ felett).

3. Legyen $V = \{(x, y, z, v, w) \in \mathbb{R}^5 : x - y = z + v \text{ és } 2y + w = 0\}$.

(a) Mutasd meg, hogy V altere $\mathbb{R}^5$-nek és add meg egy bázisát.

(b) Add meg V két direktkiegészítőjét és azok egy-egy bázisát.

(c) Adj meg olyan $\varphi : \mathbb{R}_5[x] \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés, melyre $\mathrm{Im}(\varphi) = V$.

4. Adj meg olyan lineáris traszformációt $\mathbb{R}^3$-ön, melyre

(a) $\{\mathbf{0}\} \neq \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Im}(\varphi)$;

(b) $\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1$ és $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$;

(c) $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 2$ és φ az $\mathrm{Im}(\varphi)$-n identitás;

(d) $\varphi^3 \equiv \mathbf{0}$, de $\varphi^2 \not\equiv \mathbf{0}$.

5. A következő sorozatok közül melyek lehetnek egy $\varphi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ lineáris leképezés 1., 2., 3. és 4. hatványinak rangjaiból álló sorozat, vagyis $(r(\varphi), r(\varphi^2), r(\varphi^3), r(\varphi^4))$?

(a) $(3, 4, 2, 2)$, (b) $(6, 5, 4, 3)$, (c) $(5, 4, 4, 4)$, (d) $(5, 4, 4, 3)$, (e) $(3, 2, 1, 0)$.

HF 1. Lineárisak-e az alábbi leképezések? Ha igen, akkor határozd meg a magterüket és a képterüket, és azok egy-egy bázisát (0.5-0.5 pont).

(a) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\psi(x, y, z) = (x - y, x + z, 2x - y + z)$ ($\mathbb{R}$ felett);

(b) $\gamma : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$, $\gamma(z_1, z_2) = (iz_2 - z_1, z_2, z_1)$ ($\mathbb{C}$ felett).

HF 2. Pontosan mely természetes számokból álló sorozatok lehetnek egy $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ lineáris leképezés hatványinak rangjaiból álló sorozatok. Más szóval, add meg az

$$\left\{ \left(r(\varphi), r(\varphi^2), \dots \right) \mid \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \text{ lineáris} \right\}$$

halmazt.