Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz) — 9. gyakorlat

1. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 10 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$. Végezd el az alábbi műveleteket, ha értelmesek.

(a) $\mathbf{AB}$; (b) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^T$; (c) $\mathbf{BA}$; (d) $\mathbf{Ba}$; (e) $\mathbf{B}^T\mathbf{A}$; (f) $\mathbf{Aa}$; (g) $\mathbf{a}^T\mathbf{B}^T$; (h) $\mathbf{A}^2\mathbf{B}^T - 3\mathbf{B}^T$.

2. Számold ki a következő mátrixok 101. hatványát:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Melyek igazak az alábbi állítások illetve egyenletek közül tetszőleges (egységelemes R gyűrű feletti) $n \times n$-es mátrixokra? Amelyek nem igazak $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ felett, azokra adjunk ellenpéldát minden lehetséges n esetén.

$$\text{(a) } \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \Longrightarrow \mathbf{A} = \pm\mathbf{I}; \quad \text{(b) } \mathbf{A}^2 = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}; \quad \text{(c) } \mathbf{AB} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{BA} = \mathbf{0};$$

$$\text{(d) } (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2; \quad \text{(e) } (\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}^2.$$

4. Add meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát az adott bázis(pár)ban.

(a) $\mathbb{R}^2$ tükrözése az $x = y$ egyenesre, $B, C =$ standard;

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z)$, $B, C =$ standard;

(c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) = 3x - 4y$, $B, C =$ standard;

(d) adott $a+bi$ komplex számmal való szorzás $\mathbb{C}$-n mint valós / komplex vektortéren, $B, C =$ standard;

(e) a sík α szögű elforgatása az origó körül, $B, C =$ standard;

(f) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol α mátrixa a standard bázisban $[\alpha]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (vagyis $\alpha(x, y) = (x + y, 2x - 3y)$), $B, C = \langle(1, 2), (1, 1)\rangle$;

(g) $\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\beta(1, 2, 1) = (0, 2, 1)$, $\beta(1, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $\beta(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$ a standard bázisban;

(h) $\gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(x, y) = (x + y, y, x)$, $B_1 = \langle(1, 1), (2, 0)\rangle$ és $B_2 = \langle(1, 2, 1), (-1, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle$;

(i) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;

(j) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(p(x)) = (xp(x))'$, $B_1 = \langle 1, x, x^2\rangle$ és $B_2 = \langle x + 1, 1 - x^2, x\rangle$ (ebben az esetben négy(!) mátrixról is beszélhetünk: $[\varphi]_{B_1}$, $[\varphi]_{B_2}$, $[\varphi]_{B_2/B_1}$, $[\varphi]_{B_1/B_2}$).

HF 1. Határozd meg a $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix n. hatványát.

HF 2. Add meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát az adott bázisban ($0.5 - 0.5 - 1$ pont).

(a) konjugálás $\mathbb{C}$-n mint valós vektortéren, $B =$ standard;

(b) $\mathbb{R}^3$ forgatása a z tengely körül $60°$-kal, $B =$ standard;

(c) $\mathbb{R}^3$ forgatása az $x = y = z$ tengely körül $45°$-kal, $B = \langle(2, 2, 2), (1, 1, -2), (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)\rangle$.

HF 3. Melyek igazak az alábbiak közül tetszőleges $n \times n$-es mátrixokra? (összesen 1 pont)

$$\text{(a) } (\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2; \quad \text{(b) } (\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T; \quad \text{(c) } \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \Longrightarrow \mathbf{A} \neq \mathbf{0}, \mathbf{I}.$$