Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz)

Vektorok és lineáris leképezések koordinátázása

Legyen V egy végesdimenziós T-vektortér (T tetszőleges test), $\dim V = n \in \mathbb{N}^+$ és legyen $B = \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$ egy bázis V-ben. A $\langle \ldots \rangle$ jelölés használata a szokásos $\{\ldots\}$ helyett azt jelenti, hogy rögzítettük a vektorok egy sorrendjét (tehát nem összekeverendő a vektorrendszer által generált altér fogalmával). Tudjuk, hogy minden $\mathbf{v} \in V$ egyértelműen felírható

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{b}_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbf{b}_k \ \ (\alpha_k \in T)$$

alakban (ez valójában ekvivalens azzal hogy B bázis). Ekkor a $\mathbf{v}$ *vektor* B *bázisbeli koordinátázása*:

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in T^{n \times 1}.$$

Tehát egy vektor koordinátázása egy adott bázisban egy $n \times 1$-es mátrix. Ezáltal teljesen megkülönböztetjük a vektorokat a koordinátás alakjuktól.

Vegyük észre, hogy a koordinátázás valójában egy

$$[\cdot]_B : V \to T^{n \times 1} \text{ lineáris izomorfizmus.}$$

Pont ezzel bizonyítható, hogy minden n dimenziós T-vektrotér izomorf $T^{n \times 1}$-gyel, ami nyilván izomorf T^n-nel.

Mostantól T^n elemeire az

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in T^n$$

jelöléseket fogjuk használni, mely nem összetévesztendő az $1 \times n$-es illetve $n \times 1$-es mátrixokkal, főleg, hogy T^n elemei esetében nem különböztetjük meg a "fekvő" illetve az "álló" írásmódot.

Természetesen elég lenne "csak" a T^n alakú vektorterekkel foglalkoznunk hiszen minden n dimenziós T-vektortér izomorf T^n-nel. Ezt az izomorf "áttérést" egy későbbi feladatban bemutatjuk.

T^n-ben *standrad bázisnak* nevezzük a következő vektorrendszert:

$$ST = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ennek elemeit sorban $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$-nel fogjuk jelölni. Az ST jelölésből nem derül ki sem a test sem a dimenzió, de ez konkrét példáinkban nem fog zavart okozni.

Természetesen egy $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in T^n$ vektor standard bázisban való koordinátázása triviálisan kapható: $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + x_n \mathbf{e}_n$, amiből

$$[\mathbf{v}]_{ST} = [(x_1, x_2, \ldots, x_n)]_{ST} = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]_{ST} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Példa. Legyen $T = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ és $B = \langle (1,0,-1), (1,2,0), (1,1,1) \rangle$ (könnyen meggondolható, hogy B bázis $\mathbb{R}^3$-ben). Irjuk fel a $\mathbf{v} = (0,1,3)$ vektort a B bázisban, vagyis adjuk meg $\mathbf{v}$-nek a B bázisbeli $[\mathbf{v}]_B$ koordinátás alakját.

Megoldás B elemeire sorban a $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ és $\mathbf{b}_3$ jelöléseket használva meg kell határoznunk a $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \alpha_3\mathbf{b}_3$ előállíátsban az együtthatókat. Ez vektorokkal felirva:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vagyis koordinátánként felírva az egynlőséget a következő lineáris egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ 1 &= 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ 3 &= -\alpha_1 + \alpha_3. \end{aligned}$$

Ezt Gauss-elliminációval vagy ad hoc módszerekkel megoldva kapjuk, hogy $\alpha_1 = -2/3$, $\alpha_2 = -5/3$, $\alpha_3 = 7/3$. Tehát $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -5/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$.

Rátérünk lineáris leképezések koordinátázására. Legyenek V és W végesdimenziós T-vektorterek, $B = \langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$ bázis V-ben ($\dim(V) = n$) és $C = \langle \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k \rangle$ bázis W-ben ($\dim(W) = k$). Ekkor minden $\varphi : V \to W$ lineáris leképezés koordinátázható a (B, C) bázispárban: van egy olyan $[\varphi]_{C/B} \in T^{k \times n}$ mátrix, melyre tetszőleges $\mathbf{v} \in V$ esetén

$$[\varphi(\mathbf{v})]_C = [\varphi]_{C/B}[\mathbf{v}]_B.$$

Tudjuk, hogy egyetlen ilyen mátrix létezik és ennek oszlopai $[\varphi(\mathbf{b}_1)]_C, \ldots, [\varphi(\mathbf{b}_n)]_C$.

Vegyük észre, hogy ez a koordinátázás valójában egy

$$[\cdot]_{C/B} : \mathrm{Hom}(V, W) \to T^{k \times n} \text{ lineáris izomorfizmus,}$$

ahol $\mathrm{Hom}(V, W)$ a $V \to W$ lineáris leképezések T-vektorterét jelöli.

Ha $V = W$ és $B = C$, akkor $[\varphi]_{B/B}$ az egyszerűbb $[\varphi]_B$ jelölést használjuk ($\mathrm{Hom}(V, V)$ helyett pedig $\mathrm{End}(V)$-t).

A továbbiakban példákon is bemutatjuk ezt a koordinátázásai eljárást.

9./4. Add meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát az adott bázis(pár)ban.

(a) $\mathbb{R}^2$ tükrözése az $x = y$ egyenesre, $B =$ standard;

Megoldás. Jelölje φ ezt a lineáris leképezést. Látható, hogy $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ képe $\varphi(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 = (0,1)$ és fordítva is $\varphi(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$. Ezek koordinátázása $\varphi(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2$ és $\varphi(\mathbf{e}_2) = 1\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2$ miatt adott: $[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{ST} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $[\varphi(\mathbf{e}_2)]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, amiből $[\varphi]_{ST} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x + y, y + z)$, $B =$ standard, $C =$ standard.

Megoldás. Hasonlóan okoskodhatunk: $\varphi(\mathbf{e}_1) = \varphi(1,0,0) = (1,0)$, $\varphi(\mathbf{e}_2) = (1,1)$ és $\varphi(\mathbf{e}_3) = (0,1)$. Ezeket a vektorokat a szokásos módon koordinátázhatjuk $\mathbb{R}^2$ standard bázisában: $[\varphi(\mathbf{e}_1)]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[\varphi(\mathbf{e}_2)]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $[\varphi(\mathbf{e}_3)]_{ST} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, amiből $[\varphi]_{ST/ST} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. A nehézkes $[\varphi]_{ST/ST}$ jelölés helyett mostantól $[\varphi]_{ST}$-t használunk akkor is, ha mindkét vektortéren standard bázisukat rögzítettük. Ez becsapós, mert eddigi jelöléseink szerint ez azt is jelenthetné, hogy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de nem fog félreértést okozni.

Másképpen: $\varphi(x,y,z) = (x+y, y+z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x+1y+0z \\ 0x+1y+1z \end{pmatrix}$, amiből $[\varphi(x,y,z)]_{ST} = \begin{bmatrix} 1x+1y+0z \\ 0x+1y+1z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} [(x,y,z)]_{ST}$. Tehát a $[\varphi]_{ST}$ mátrix egyértelműsége miatt $[\varphi]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = 3x - 4y$, $B =$ standard, $C =$ standard.

Megoldás. Az eddigiekből könnyen látható, hogy $[\varphi]_{ST} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$.

(d) Adott $a + bi$ komplex számmal való szorzás $\mathbb{C}$-n mint valós / komplex vektortéren, $B =$ standard;

Megoldás. Valós fölött: A komplex számokat azonosíthatjuk $\mathbb{R}^2$ elemeivel: $x + yi \sim (x,y)$. Természetesen $x + yi$ és (x,y) valójában egyenlő, ha a komlex számokat a síkon bevezetett szorzással definiáljuk. Leképezésünk hatása $\mathbb{R}^2$-en:

$$(x,y) \sim x + yi \mapsto (a+bi)(x+yi) = (ax - by) + (ay + bx)i \sim (ax - by, bx + ay).$$

Vagyis a $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x,y) = (ax - by, bx + ay)$ lineársi leképezésről van szó. Ennek standard bázisbeli mátrixát könnyen meghatározhatjuk: $[\varphi(x,y)]_{ST} = \begin{bmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} [(x,y)]_{ST}$, vagyis $[\varphi]_{ST} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Komplex fölött még sokkal egyszerűbb a dolog, hiszen egy $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineáris leképezés mátrixa 1×1-es komplex mátrix, vagyis egy komplex számmal szorzás. Esetünkben $[a + bi] \in \mathbb{C}^{1\times 1}$.

Megjegyezzük, hogy az $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ alakú mátrixok azonosíthatók a komplex számokkal, ugyanis a

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$$

halmaz a szokásos mátrixösszeadással és mátrixszorzással egy a komplex számokkal izomorf test (ezt érdemes meggondolni). Ennek még fontos szerepe lesz a komplex ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) függvények differenciálhatóságának megértésében.

(e) A sík α szögű elforgatása az origó körül, $B =$ standard.

Megoldás. Egyszerű trigonometriai okoskodás mutatja, hogy $(1,0)$ képe $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ és $(0,1)$ képe $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha))$, amiből a forgatás mátrixa ST-ben: $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$.

(f) $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ahol α mátrixa a standard bázisban $[\alpha]_{ST} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ (vagyis $\alpha(x,y) = (x + y, 2x - 3y)$), $B = \langle (1,2), (1,1) \rangle$;

Megoldás. Jelölje $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ a B bázis elemeit. Meg kell határoznunk $[\alpha(\mathbf{b}_1)]_B$-t és $[\alpha(\mathbf{b}_2)]_B$-t. Ez a következő lineáris egyenletrendszerekhez vezet: $\alpha(\mathbf{b}_1) = \alpha(1,2) = (1 + 2, 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2) =$

$(3,-4) = \lambda_1\mathbf{b}_1 + \lambda_2\mathbf{b}_2 = \lambda_1(1,2) + \lambda_2(1,1)$ illetve $\alpha(\mathbf{b}_2) = (2,-1) = \mu_1(1,2) + \mu_2(1,1)$, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ az ismeretlenek. Koordinátánkénti alakban: $3 = \lambda_1 + \lambda_2$, $-4 = 2\lambda_1 + \lambda_2$, amiből $\lambda_1 = -7$ és $\lambda_2 = 10$. Hasonlóan $\mu_1 = -3$ és $\mu_2 = 5$. Tehát $[\alpha(\mathbf{b}_1)]_B = \begin{bmatrix} -7 \\ 10 \end{bmatrix}$ és $[\alpha(\mathbf{b}_2)]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, vagyis $[\alpha]_B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$.