Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz)
1. ZH mintafeldatok

1 Félcsoportok, csoportok és gyűrűk

1.1. Add meg $\mathbb{R}^2$ egy olyan részhalmazát, mely a vektorösszeadásra nézve (Abel-)csoportot alkot, de nem fedhető le egy (origón átmenő) egyenessel és nem is az egész sík.

Megoldás. Legyen $H = \{(n, k) : n, k \in \mathbb{Z}\}$ az egész koordinátájú pontok halmaz a síkon. Könnyen ellenőrizhető, hogy $(H, +)$ csoport.

1.2. Bizonyítsd be, hogy nincs olyan háromelemű $(S, \cdot)$ félcsoport ($S = \{a, b, c\}$), amelyre $ab = c$, $bc = a$ és $ca = b$. Van-e olyan félcsoport, amelynek ez részhalmaza (ugyanezzel a műveleti táblával)?

Megoldás. Ha lenne ilyen félcsoport, akkor ebben $a^2 = a(bc) = (ab)c = c^2$ és $b^2 = (ca)b = c(ab) = c^2$ vagyis $a^2 = b^2 = c^2 = x$. Ekkor $x = a$ vagy $x = b$ vagy $x = c$. Tegyük fel, hogy $x = a$. Ekkor $a = a^2 = aa = a(b^2) = (ab)b = cb$ és ebből $b = ca = c(b^2) = (cb)b = ab = c$, ellentmondás. (Az ilyen feladatok megoldására nincsen kész recept, kicsit szórakozni kell a már ismert egyenlőségekkel. Például ennél a feladatnál, első ötletként az eredetileg nem ismert ba, cb és ac kitalálása jó kiindulópont.)

S részhalmaza a Klein-csoportnak. Precízen: reprezentáljuk a Klein-csoportot most a következőképpen: $G = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ a modulo 2 összeadással, vagyis például $(0, 1) + (1, 1) = (1, 0)$ mert az $1 + 1 = 2$ szám 0 maradékot ad 2-vel osztva. Ekkor az $a = (0, 1)$, $b = (1, 0)$ és $c = (1, 1)$ választással pont az előírt művleti azonosságokat kapjuk (most összeadással jelöljük a műveletet). Pontosan azt láttuk be az előbb, hogy $a + a = (0, 0)$ nem lehet $\{a, b, c\}$-ben.

1.3. Milyen struktúrát alkot az 1 hosszú komplex számok $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ halmaza a szokásos

(a) összeadással?

(b) szorzással?

Megoldás. (a) nem algebrai struktúra, mert például $1 \in S$, de $1 + 1 = 2 \notin S$.

(b) Abel-csoport, mert két darab 1 hosszú komplex szám szorzata nyilván 1 hosszú. Az asszociativitást, kommutativitást és az egységelemet nem kell ellenőrizni, következik az összes komplex számra vonatkozó megfelelőjéből. Inverz: ha $z = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \in S$, akkor $z^{-1} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) \in S$.

1.4.* Tegyük fel, hogy egy $(R, +, \cdot)$ gyűrűben minden $r \in R$-re $r^2 = r$. Mutasd meg, hogy ekkor R (vagyis a szorzása) kommutatív.

Megoldás. Legyen $a, b \in R$ tetszőlegesek. Ekkor $a + b = (a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a + ab + ba + b$, amiből kivonva a-t és b-t kapjuk, hogy $0 = ab + ba$. Ezt alkalmazva $a = r$, $b = r$-re $0 = r^2 + r^2 = r + r$, tehát minden r-re $r = -r$, amiből $0 = ab + ba$ miatt $ab = -ba = ba$.

2 Komplex számok

2.1. Mi a geometriai jelentése a $z \mapsto i|z|$ leképezésnek a komplex síkon?

Megoldás. A z pontot elforgatjuk a 0 körül a képzetes tengely "felső" száráig. Ez persze így nem túl precíz, csak adott z képét adtuk meg. Másképpen: felhajtjuk az sík alsó felét a felsőre (a felső pontjait fixen hagyva) és ezután "legyezőszerűen becsukjuk" a (zárt) felső félsíkot az pozitív képzetes tengelyre.

2.2. Adj meg olyan $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ leképezést a képletével (z változóval!), mely a 45°-os egyenesre tükrözésnek felel meg.

Megoldás. $z \mapsto i\overline{z}$.

2.3. Old meg a $iz^3 = \frac{-8+24i}{-1-2i}$ egyenlete a komplex számok halmazán.

Megoldás.

$$z^3 = \frac{-8+24i}{i(-1-2i)} = 8\frac{-1+3i}{2-i} = 8\frac{(-1+3i)(2+i)}{2^2+1^1} =$$

$$8\frac{-5+5i}{5} = -8+8i = 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

amiből

$$z = \sqrt[3]{2^{\frac{7}{2}}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),$$

ahol $k = 0, 1, 2$, vagyis

$$z_0 = 2^{\frac{7}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$z_1 = 2^{\frac{7}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$
$$z_2 = 2^{\frac{7}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

2.4. Ábrázold a komplex síkon az $\mathrm{Im}(2\overline{z})\mathrm{Re}(\frac{1}{z}) = 1$ egyenlettel definiált halmazt.

Megoldás. $z = x + yi (\neq 0)$ jelöléssel

$$\mathrm{Im}(2\overline{z})\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = -2y\frac{x}{x^2+y^2} = 1,$$

amiből $0 = x^2 + 2xy + y^2$, vagyis $0 = (x+y)^2$. Ez csak akkor lehetséges, ha $y = -x$, vagyis a -1 meredekségű origón átmenő egyenesről van szó az origó nélkül.

3 Vektorok

3.1. Legyen $A = (1,0,2), B = (0,3,1), C = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$. Határozd meg azon D pontokat a térben, melyekre az $\overrightarrow{OD}$ párhuzamos az $(1,2,3)$ vektorral és az $ABCD$ tetraéder térfogata 20 egység.

Megoldás. $D = t(1,2,3)$ alakúnak kell lennie. Ekkor az $ABCD$ tertraéder térfogata

$$20 = V = \frac{|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|}{6} = \frac{1}{6}\big|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}\big|,$$

amiből

$$120 = \big|\big((-1,3,-1)\times(0,1,-1)\big)(t-1,2t,3t-2)\big| = |(-3-(-1),-(1-0),-1-0)(t-1,2t,3t-2)\big| =$$

$$|-2(t-1)-2t-(3t-2)| = |-7t+4|.$$

Tehát vagy $-7t+4 = 120$ vagy $-7t+4 = -120$, amiből $t_1 = -\frac{116}{7}$ és $t_2 = \frac{124}{7}$. Ebből a D pont pedig $D_1 = (-\frac{116}{7}, -\frac{232}{7}, -\frac{348}{7})$ és $D_2 = (\frac{124}{7}, \frac{248}{7}, \frac{372}{7})$.

3.2. Adott $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$. Hogyan jellemezhetők azon $\mathbf{v}$ vektorok, melyekre

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{v}$?

(b) $\mathbf{av} = \mathbf{bv}$?

Megoldás. (a) $\mathbf{a} \times \mathbf{v} - \mathbf{b} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ és így $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, ami pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{a} - \mathbf{b} \parallel \mathbf{v}$.

(b) hasonlóan kapjuk, hogy $\mathbf{a} - \mathbf{b} \perp \mathbf{v}$.

4 Polinomok

4.1. Mutasd meg, hogy az $x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x - 11$ polinomnak van olyan x_0 komplex gyöke melyre $|x_0| > 2$. Add meg továbbá a gyökök négyzetösszegét.

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket most az

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) =$$

$$x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+bc+cd+da+ac+bd)x^2 - (abc+abd+bcd+acd)x + abcd$$

egyenlőségből kapjuk. Például $a+b+c+d = -8$, amiből $|a+b+c+d| = 8 \leq |a|+|b|+|c|+|d|$ tehát valamelyikük abszolút értékének nagyobbnak kell lennie 2-nél.

A gyökök négyzetösszege:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b+c+d)^2 - 2(ab+bc+cd+da+ac+bd) = (-8)^2 - 2(-1) = 66.$$

4.2. Bontsd fel $\mathbb{Q}$ felett irreducubilisek szorzatára a $12x^4 + 36x^3 - 21x^2 + 8x + 4$ polinomot.

Megoldás. A racionális gyökteszt szerint racionális gyök csak ± 1, ± 2, ± 4, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$, $\pm\frac{4}{3}$, $\pm\frac{1}{4}$, $\pm\frac{1}{6}$, $\pm\frac{1}{12}$ lehet. Némi próbálgatás után kiderül, hogy $\frac{1}{2}$ jó, tehát $x - \frac{1}{2}$ (és akkor inkább $2x - 1$) kiemelhető a polinomból: $12x^4 + 36x^3 - 21x^2 + 8x + 4 = (2x-1)(6x^3 + 21x^2 + 4)$. A harmadfokú tényező pedig irreducibilis a fordított Schönemann-Eisenstein kritérium szerint ($p = 3$).

4.3.* Határozd meg az n. egységgyökök négyzetösszegét.

Megoldás. $n = 1$-re 1, $n = 2$-re 2. Legyen $n > 2$. Általában az $x^n - 1$ polinom gyökeiről lévén szó, a gyökök és együtthatók közötti összefüggések szerint $(-1)^n(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n) =$"az x^{n-1}-es tag együtthatójával"$= 0$ és hasonlóan $\sum_{k<m} \varepsilon_k\varepsilon_m =$"az x^{n-2}-es tag együtthatójával"$= 0$. Ebből már adódik, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\right)^2 - 2\sum_{k<m} \varepsilon_k\varepsilon_m = 0.$$