Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz)
2. ZH mintafeldatok

1 Vektortér-e, lineáris-e?

1.1. Az alábbi struktúrák közül melyik vektortér? A végesdimenziós vektortereknek add meg egy-egy bázisát.

(a) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det \mathbf{A} = 0\}$ a szokásos mátrixműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(b) $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \det \mathbf{A} \neq 0\}$ a szokásos mátrixműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(c) $\{f \in \mathbb{R}_3[x] : f(1) = 1\}$ a szokásos polinomműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(d) $\{f \in \mathbb{R}_3[x] : f(2) = 0\}$ a szokásos polinomműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(e) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0\}$ a szokásos vektorműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(f) $\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : |z_1| = |z_2 + z_3 + z_4|\}$ a szokásos vektorműveletekkel, $\mathbb{C}$ felett.

(g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (1, -2, 3)(x, y, 3z) = 0\}$ a szokásos vektorműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(h) $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ rögzített, $\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \mathbf{AB} = \mathbf{BA}\}$ a szokásos mátrixműveletekkel, $\mathbb{R}$ felett.

(i) $\{f : (0, 1) \to \mathbb{R} : f'$ korlátos és $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0\}$ a szokásos függvényműveletekkel, $\mathbb{R}$-felett.

1.2. Az alábbi leképezések közül melyek lineárisak? A lineárisaknak add meg a magterét, képterét és azok egy-egy bázisát.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, 0)$, $\mathbb{R}$ felett.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_4[x]$, $\varphi(a, b, c) = a - bx + cx^4$, $\mathbb{R}$ felett.

(c) $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $\varphi(z) = |z + i|$, $\mathbb{R}$ felett.

(d) $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\varphi(z_1, z_2) = (-iz_2, z_1)$, $\mathbb{C}$ felett.

(e) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(f) = (\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, f(1))$, $\mathbb{R}$ felett.

(f) $\varphi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $\varphi(z_1, z_2) = z_1 - z_2$, $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ felett is.

1.3. Adj meg olyan $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, melynek képtere az $x - y + 2z = 0$ sík.

1.4. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges lineáris leképezés és tegyük fel, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi) \cap \mathrm{Im}(\varphi) = \{\mathbf{0}\}$. Mutasd meg, hogy ekkor $V = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$, vagyis hogy minden $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ egyértelműen előáll $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ alakban, ahol $\mathbf{v}_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ és $\mathbf{v}_2 \in \mathrm{Im}(\varphi)$.

2 Koordinátázás

2.1. Add meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát az adott bázis(pár)ban.

(a) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y) = (x + y, y, 3y - x)$, $B = C = ST$.

(b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y, z) = (x, x + y + z)$, $B = \langle(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 2)\rangle$, $C = ST$.

(c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(x, y, z) = (x, x + y, z - x)$, $B = C = \langle(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 2)\rangle$.

(d) $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $\varphi(f) = f' + f$, $B = C = \langle x^2, x - 1, x^2 - x - 2\rangle$.

2.2. Legyen a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa $B = C = \langle(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, -1, 2)\rangle$-ben $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Határozd meg φ mátrixát ST-ben.

2.3. Határozd meg az $(1, 2, -4)$ által kifesztett egyenesre merőleges vetítés mátrixát egy általad választott bázisban.

3 Rang és Gauss-ellimináció

3.1. Határozd meg az $\{(1, 0, -1, 3), (2, -3, 0, 2), (-1, 3, -1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ vektorrendszer rangját és adj meg maximális számú független vektort a rendszerből.

3.2. Oldd meg az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$\text{(a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.3. Az a és b valós paraméterek függvényében hány megoldása van az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszert, ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{bmatrix}.$$

4 Determináns és inverz

4.1. Határozd meg az alábbi mátrixok determinánsát.

$$\text{(a) } \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n+1 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & \dots & n^2 \end{bmatrix}.$$

4.2. Határozd meg az $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ mátrix inverzét.

4.3. Legyen $n > 1$ természetes szám és $f_1, \dots, f_n$ legfeljebb $(n-2)$-edfokú valósegyütthatós polinomok, továbbá $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Határozd meg az

$$\begin{bmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \dots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_n) \end{bmatrix}$$

mátrix determinánsát.

4.4. Legyen $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ egy *ortogonális* mátrix, vagyis $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$.

- Mi lehet $\mathbf{Q}$ determinánsa?
- Mutasd meg, hogy $\mathbf{Q}$ oszlopai páronként merőleges, 1 hosszú vektorok.
- Mutasd meg, hogy minden olyan 3×3-as valós mátrix ortogonális, melynek oszlopai páronként merőleges, 1 hosszú vektorok.

5 Sajátérték, sajátvektor

5.1. Határozd meg az alábbi mátrixok és lineáris leképezések valós sajátértékeit és hozzájuk tartozó sajátvektorait.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $\mathbb{R}^3$ 180°-os forgatása az $(1, 0, -2)$ által kifeszített egyenes körül;

(d) $\mathbb{R}^3$ $(1, 1, 1)$ irányú vetítése az $x - y + 2z = 0$ síkra.

6 Vegyes

6.1. Melyek azok a 3×3-as valós mátrixok, melyek minden 3×3-as mátrixszal felcserélhetők?

6.2. Legalább hány 0 elem esetén biztosan 0 egy $n \times n$-es mátrix determinánsa?

6.3. Minden V valós vektortérre legyen $V' = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ a $V \to \mathbb{R}$ lineáris leképezések vektortere. Mutasd meg, hogy minden $\mathbf{v} \in V$ esetén $\hat{\mathbf{v}} : V' \to \mathbb{R}$, $\hat{\mathbf{v}}(\varphi) = \varphi(\mathbf{v})$ egy lineáris leképezés, vagyis $\hat{\mathbf{v}} \in V''$. Mutasd meg, hogy ha V véges dimenziós, akkor a $\mathbf{v} \mapsto \hat{\mathbf{v}}$ leképezés lineáris izomorfia V és V'' között.