Lineáris Algebra fizikusoknak (2010-11 ősz)

Néhány megoldás

1./2./(b) Legyen $(S, \cdot)$ egységelemes félcsoport és $a, b \in S$. Bizonyítsd be, hogy ha ab és ba invertálható, akkor a és b is invertálható.

Megoldás. Legyen $x = b(ab)^{-1}$. Ekkor $ax = a(b(ab)^{-1}) = (ab)(ab)^{-1} = e$ vagyis x az a egy jobbinverze. Hasonlóan $y = (ba)^{-1}b$ az a egy balinverze, tehát a invertálható és $a^{-1} = x = y$.

2./4./(e) Ábrázold a komplex síkon a $\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z+1}) = 0$ halmazt.

Megoldás. Felhasználva a trigonometrikus alakban osztásra vonatkozó ismereteinket, egy komplex hányados valós része pontosan akkor 0, ha a számláló és nevező argumentumának eltérése $\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ez pont azt jelenti, hogy $z - 1$ és $z + 1$ mint vektorok merőlegesek: ha $z = a + bi$, akkor $(a - 1, b) \perp (a + 1, b)$, vagyis $a^2 - 1 + b^2 = 0$. Másképpen $a^2 + b^2 = 1$, ami pont az origó közepű 1 sugarú körvonal pontjaira igaz.

2./5./(c) Oldd meg a $z^2 + 2iz - 1 + i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

Megoldás. Megoldóképlettel:

$$z = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(-1+i)}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4i}}{2}.$$

és $-4i = 4(\cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2})$, amiből $\sqrt{-4i} = \pm 2(\cos -\frac{\pi}{4} + i \sin -\frac{\pi}{4}) = \pm 2(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) = \pm(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)$. Tehát

$$z = \frac{-2i \pm (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2-\sqrt{2}}{2}i \text{ és } -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{-2+\sqrt{2}}{2}i.$$

3./2. Oldd meg a $2z^4 + 1 - \sqrt{3}i = 0$ egyenletet a komplex számok halmazán.

Megoldás. $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3})$. Tehát

$$z = \cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{4}$$

ahol $k = 0, 1, 2, 3$, vagyis

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}, \\ z_1 &= \cos\frac{4\pi}{6} + i \sin\frac{4\pi}{6}, \\ z_2 &= \cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}, \\ z_3 &= \cos\frac{10\pi}{6} + i \sin\frac{10\pi}{6}. \end{aligned}$$

Tehát $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ és $z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3./7. Határozd meg az $(1, 0, -2)$ és $(1, 1, 3)$ vektorok szögét.

Megoldás. Tudjuk, hogy $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$, ahol γ az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok által bezárt szög. Tehát

$$\cos\gamma = \frac{(1,0,-2)(1,1,3)}{\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{11}},$$

amiből számológéppel meghatározható γ.

4./3./(a) Igaz-e, hogy ha $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ és $f(x) \mid_{\mathbb{R}[x]} g(x)$, akkor $f(x) \mid_{\mathbb{Q}[x]} g(x)$?

Megoldás. (Ötlet.) Igen. Legyen $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ és $g(x) = c_k x^k + \cdots + c_1 x + c_0$ ahol $a_n \neq 0$ és $c_k \neq 0$. $f(x) \mid_{\mathbb{R}[x]} g(x)$ szerint létezik egy $h(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}[x]$ polinom ($b_m \neq 0$), melyre $f(x)h(x) = g(x)$. Fejezzük ki sorban g együtthatóit f és g együtthatóival:

$$\begin{aligned} c_k &= a_n b_m \\ c_{k-1} &= a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1} \\ c_{k-2} &= a_{n-2} b_m + a_{n-1} b_{m-1} + a_n b_{m-2} \\ \vdots &= \vdots \\ c_0 &= a_0 b_0 \end{aligned}$$

Az első egyenletből $b_m = \frac{c_k}{a_n} \in \mathbb{Q}$. A második egyenletből $b_{m-1} = \frac{c_{k-1} - a_{n-1} b_m}{a_n} \in \mathbb{Q}$. És így tovább... (ez precízen egy teljes indukciót jelent, amit itt most nem részletezünk)

4./6./(f) Bontsd fel gyöktényezők szorzatára az $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ polinomot.

Megoldás. Könnyen ellenőrizhető, hogy a racionális gyökteszt most nem segít, mert sem 1 sem -1 nem gyöke a polinomnak. i (és így $-i$) sem jó, más ötlet kell. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2$. Hogyan lehet ezt észrevenni?

Első lehetőség: Egyszerűen "remenykedünk", hogy szorzattá tudjuk bontani $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ alakban. Ekkor az $a + c = 2$, $b + d + ac = 3$, $bc + ad = 2$, $bd = 1$ egyenletrendszerhez jutunk, melynek az $a = b = c = d = 1$ nyilván megoldása.

Második lehetőség: Trükközés! $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^4 + x^3 + x^2) + (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^2 + x + 1)$.

Most már csak egy másdfokút kell megoldanunk.

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Tehát a gyöktényezős alak:

$$\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2 \left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)^2.$$

4./9. Bizonyítsd be, hogy nincsen olyan nem konstans $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom, mely valamikortól kezdve mindig prímszámot vesz fel, vagyis valamely $N \in \mathbb{N}$-től kezdve minden $n \geq N$ esetén $f(n)$ prím.

Megoldás. Indirekt tegyük fel, hogy van egy a feltételeknek eleget tevő nem konstans $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ polinom. Ekkor ha $g(x) = f(x + N)$, akkor g is egész együtthatós, nem konstans és g már 0-tól kezdve prímet vesz fel.

Legyen $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. Ekkor $g(0) = a_0 = p$ prím. Tegyük fel, hogy $p > 0$ (a $p < 0$ eset teljesen analóg). Ekkor minden $k \in \mathbb{N}$-re $p \mid g(kp) = a_n k^n p^n + \cdots + a_a kp + p$. Mivel $g(kp)$ prím, ezért $g(kp) = \pm p$. Kétféleképpen is befejezhetjük a bizonyítást

Első befejezés: Világos, hogy $\lim_{+\infty} g$ nem lehet sem $+\infty$ sem $-\infty$, mert akkor valamikortól kezdve $|g(x)| > p$ teljesülne. Vagyis g csak konstans lehet, ellentmondás.

Második befejezés: g végtelen sokszor felveszi vagy p-t vagy $-p$-t. Tegyük fel, hogy $-p$-t. Ekkor a $h(x) = g(x) + p$ polinomnak végtelen sok gyöke van, vagyis h és így g is csak konstans lehet, ellentmondás.

5./5. Legyenek a, b, c az $x^3 - x^2 + 3x + 6$ polinom komplex gyökei. Határozd meg az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ kifejezés értékét.

Megoldás. A gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket most az $x^3 - x^2 + 3x + 6 = (x-a)(x-b)(x-c)$ egyenlőségből kapjuk:

$$\begin{aligned} -1 &= -(a+b+c) \\ 3 &= ab+bc+ca \\ 6 &= -abc \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ca}{abc}$, kapjuk, hogy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$.